[mmwe01.tex, 24.05.16]

1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны

Электромагнитное поле – физическое понятие, которое помогает объяснить явления электрической и магнитной природы. Принято считать, что электромагнитное поле характеризуют силы, действующие на пробные заряды и токи.

В классической электродинамике электромагнитное поле описывают *четыре векторнозначные функции* $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$, зависящие от пространственных координат $\mathbf{r}$ и от времени t. Эти функции называются: $\mathbf{E}$ – *напряженность электрического поля*, $\mathbf{D}$ – *электрическая индукция*, $\mathbf{H}$ – *напряженность магнитного поля*, $\mathbf{B}$ – *магнитная индукция*. В качестве источников поля рассматриваются *заряды и токи*, плотности которых ρ и $\mathbf{j}$ также зависят от $\mathbf{r}$ и t.

В 60-е годы XIX века Дж.К. Максвелл предложил записывать связи между составляющими поля в виде системы уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Эти уравнения остались без изменения до настоящего времени, их принято называть *уравнениями Максвелла*. До сегодняшнего дня не обнаружено электромагнитных процессов, которые противоречили бы этой системе уравнений.

Уравнения Максвелла можно рассматривать как *аксиомы теории электромагнетизма*. Можно условиться отождествлять электромагнитное поле с векторнозначными функциями $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, удовлетворяющими системе уравнений Максвелла и, следовательно, хотя и не вполне корректно, говорить, что если мы нашли решение этих уравнений, то нашли электромагнитное поле.

Свойства среды задаются с помощью материальных уравнений, устанавливающих зависимости между напряженностями и индукциями поля. В вакууме $\mathbf{D} = \varepsilon_0\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}$, где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные (физические константы). В линейном диэлектрике

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mu\,\mathbf{H},$$

где ε и μ – *диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость*. Для однородной и изотропной среды ε и μ – скалярные постоянные. В проводящих средах дополнительно записывается еще одно уравнение $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где σ – проводимость.

Говорят, что вещественнозначная функция $A(\mathbf{r}, t)$ *гармонически зависит от времени*, если

$$A(\mathbf{r}, t) = A_c(\mathbf{r})\cos\omega t + A_s(\mathbf{r})\sin\omega t,$$

здесь ω – круговая частота. В этом случае комплекснозначная функция $A_c(\mathbf{r}) + iA_s(\mathbf{r})$ называется *комплексной амплитудой* функции $A(\mathbf{r}, t)$.

Легко видеть, что гармонически зависящую от времени вещественнозначную функцию можно восстановить по ее комплексной амплитуде так: нужно умножить комплексную амплитуду на $e^{-i\omega t}$ и вычислить вещественную часть произведения. Можно было бы в качестве комплексной амплитуды функции $A(\mathbf{r}, t)$ рассматривать комплексно сопряженное выражение $A_c(\mathbf{r}) - iA_s(\mathbf{r})$. Тогда для вычисления вещественнозначных амплитуд нужно использовать множитель $e^{i\omega t}$.

В дальнейшем будем рассматривать уравнения Максвелла при следующих предположениях:
1) $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ (свободные токи и заряды отсутствуют);
2) среда линейная, однородная и изотропная;
3) компоненты электромагнитного поля гармонически зависят от времени.
Тогда, например, первое уравнение Максвелла сводится к двум вещественным уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{H_c} = \omega\varepsilon_0\varepsilon\,\mathbf{E_s}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H_s} = -\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\mathbf{E_c}.$$

Перейдем к комплексным амплитудам функций $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (обозначения оставим старые, перегрузка имен ...). Получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu\,\mathbf{H}.$$

Так как $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, то любое решение этих уравнений удовлетворяет и оставшимся уравнениям Максвелла. Поэтому будет достаточно искать решения только двух уравнений Максвелла для комплексных амплитуд.

Электромагнитные волны – это распространяющиеся в пространстве колебания (в окрестности некоторых значений) характеристик электромагнитного поля. При гармонической зависимости от времени имеем гармонические электромагнитные волны.

На границе раздела двух сред уравнения Максвелла теряют смысл. Эту потерю компенсируют необходимые *условия сопряжения*

$$(\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad (\mu_1 \mathbf{H}_1 - \mu_2 \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0, \qquad [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = 0$$

(свободные токи и заряды отсутствуют). Здесь $\mathbf{n}$ – нормаль к граничной поверхности. Достаточными условиями являются два из них: *на границе раздела сред должны быть непрерывны касательные составляющие векторов* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{H}$.

На границе с металлом (с идеально проводящей средой) *должны быть равны нулю касательные составляющие вектора* $\boldsymbol{E}$. Это *граничное условие* – достаточное. Но нормальная составляющая вектора $\mathbf{H}$ также будет необходимо равна нулю.

Энергетические характеристики электромагнитного поля можно ввести двумя способами: или исходя из физического смысла уравнений Максвелла, или аксиоматически.

Плотность энергии электромагнитного поля определяется так:

$$w(r,t) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

Тогда энергия, сосредоточенная в области V, вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\, dv.$$

Плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}].$$

Здесь в правой части стоят вещественнозначные векторные функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. *Закон сохранения энергии* сводится к следующему: изменение энергии электромагнитного поля в области без источников происходит только за счет перетока энергии через границу.

При гармонической зависимости от времени значения скалярных величин, а также направления векторов меняются периодически с периодом $T = 2\pi/\omega$. Поэтому используют *средние значения* (усредненные по времени), которые вычисляются по формуле

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt.$$

Легко проверить, например, что

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*].$$

Здесь в правой части стоят комплексные амплитуды функций $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, знаком $*$ отмечено комплексно сопряженное выражение.

Итак, физической задаче об определении электромагнитного поля в некоторой области соответствует *математическая модель*: найти решения уравнений Максвелла в этой области, удовлетворяющие граничным условиям на границах идеально проводящих тел и условиям сопряжения на границах раздела диэлектрических сред.

В неограниченных областях нужно также учитывать *условия на бесконечности*, которые будут сформулированы позже.