[mmwe02.tex, 25.05.16]

2. Плоские волны. Отражение и преломление

Построим частные решения уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu\,\mathbf{H}.$$

в декартовых координатах (x, y, z).

Так как

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big),$$

то имеем шесть скалярных уравнений

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0\mu\,H_x,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu\,H_y,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0\mu\,H_z.$$

Предположим дополнительно, что компоненты поля не зависят от координаты y (плоское поле). Тогда уравнения Максвелла распадаются на две независимые подсистемы уравнений, и любое ее решение является суммой двух решений вида $(0,\ E_y,\ 0),\ (H_x,\ 0,\ H_z)$ и $(E_x,\ 0,\ E_z),\ (0,\ H_y,\ 0)$. Решениям первого типа соответствуют гармонические электромагнитные волны *параллельной поляризации* (вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси y), а решениям второго типа – волны *перпендикулярной поляризации*.

В случае параллельной поляризации поля

$$E_y = u, \qquad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

где *потенциальная функция* u должна удовлетворять *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2\,u = 0,$$

$k^2 = \omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon$, k – *волновое число*.

Функция $u(x,z) = A\,e^{i\xi x + i\zeta z}$ будет решением уравнения Гельмгольца тогда и только тогда, когда $\xi^2 + \zeta^2 = k^2$. Если ξ и ζ – вещественные неотрицательные числа, то найдется такое число $\theta \in [0, \pi/2]$, что $\xi = k\sin\theta,\ \zeta = k\cos\theta$.

Вычислим среднее значение вектора Пойнтинга

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\,[E, H^*] = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big(E_y H_z^*,\ 0,\ -E_y H_x^*\Big) = \frac{k}{2\omega\mu_0\mu}\,|A|^2\,(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta).$$

Следовательно, потенциальная функция $u(x,z) = A\,e^{ik\sin\theta\cdot x + ik\cos\theta\cdot z}$ определяет электромагнитную волну, переносящую энергию в направлении $(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$, то есть в первый квадрант плоскости (x, z) под углом θ к оси z. Потенциальная функция $u(x,z) = A\,e^{-ik\sin\theta\cdot x - ik\cos\theta\cdot z}$ определяет волну, переносящую энергию в противоположном направлении.

Для краткости речи будем называть волнами потенциальные функции вида $A\,e^{\pm i\xi x \pm i\zeta z}$. Такие волны при вещественных ξ и ζ являются *плоскими*, так как поверхности $\pm\xi x \pm \zeta z = \text{const}$ (*фронт волны*) – плоскости. С течением времени фронт волны как бы движется, причем в направлении вектора Пойнтинга.

Если одно из чисел ξ или ζ не является вещественным, то такая волна является *затухающей* в направлении одной из осей.

Пусть плоскость $z = 0$ разделяет две среды с разными свойствами: при $z > 0$ волновое число $k = k_+$, при $z < 0$ волновое число $k = k_-$. Пусть на границу раздела сред падает сверху плоская параллельно поляризованная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x,z) = A^0\,e^{-ik_+\sin\theta^0\cdot x - ik_+\cos\theta^0\cdot z}$$

(придерживаемся правила: номер среды указывается снизу, а номер волны – сверху). Будем искать отраженные и преломленные волны, тоже плоские и параллельно поляризованные:

$$u^+(x,z) = A^+\, e^{-ik_+ \sin\theta^+ \cdot x + ik_+ \cos\theta^+ \cdot z},$$

$$u^-(x,z) = A^-\, e^{-ik_- \sin\theta^- \cdot x - ik_- \cos\theta^- \cdot z}.$$

Пока это предположение – гипотеза. Но можно доказать, что других решений быть не может.

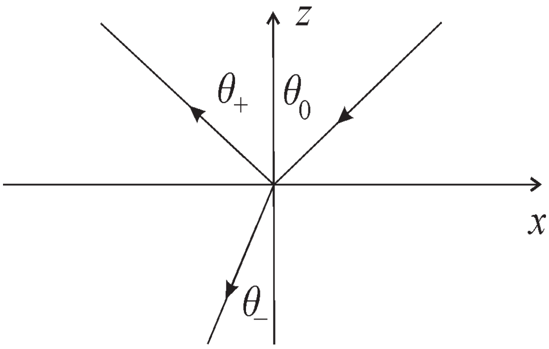

Рис. Отражение и преломление плоской волны

Будем считать в дальнейшем, что $\mu_+ = \mu_- = \mu$, но $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$. Запишем условия сопряжения на границе раздела сред

$$u^0(x,0) + u^+(x,0) = u^-(x,0), \quad \frac{\partial u^0}{\partial z}(x,0) + \frac{\partial u^+}{\partial z}(x,0) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(x,0).$$

Условия сопряжения будут выполнены при всех значения x, если

$$k_+ \sin\theta^0 = k_+ \sin\theta^+ = k_- \sin\theta^-.$$

Отсюда следует, что угол отражения равен углу падения и угол преломления выражается через угол падения и диэлектрические проницаемости сред (*законы Снелля или Снеллиуса*). Тогда для искомых амплитуд плоских волн остаются уравнения

$$A^0 + A^+ = A^-, \quad -k_+ \cos\theta^0 \cdot A^0 + k_+ \cos\theta^+ \cdot A^+ = -k_- \cos\theta^- \cdot A^-.$$

Отсюда

$$A^+ = \frac{k_+ \cos\theta^0 - k_- \cos\theta^-}{k_+ \cos\theta^0 + k_- \cos\theta^-} A^0, \quad A^- = \frac{2k_+ \cos\theta^0}{k_+ \cos\theta^0 + k_- \cos\theta^-} A^0$$

или

$$A^+ = \frac{\sqrt{\varepsilon_+} \cos\theta^0 - \sqrt{\varepsilon_-} \cos\theta^-}{\sqrt{\varepsilon_+} \cos\theta^0 + \sqrt{\varepsilon_-} \cos\theta^-} A^0, \quad A^- = \frac{2\sqrt{\varepsilon_+} \cos\theta^0}{\sqrt{\varepsilon_+} \cos\theta^0 + \sqrt{\varepsilon_-} \cos\theta^-} A^0$$

(*формулы Френеля*).

Проверим, выполняется ли закон сохранения энергии. Рассмотрим потоки векторов Пойнтинга через поверхность $z = 0$, а точнее, через ее единичные площадки. Ясно, что при вычислении потока энергии через такие участки плоскости нужно знать только z-компоненту вектора П. При этом удобно иметь дело со средними значениями величин.

Для падающей волны

$$\overline{\Pi}_z^0 = -\frac{k_+ |A^0|^2 \cos\theta^0}{2\omega\mu_0\mu},$$

и для других волн трехлучевой схемы

$$\overline{\Pi}_z^+ = \frac{k_+ |A^+|^2 \cos\theta^0}{2\omega\mu_0\mu}, \quad \overline{\Pi}_z^- = -\frac{k_- |A^-|^2 \cos\theta^-}{2\omega\mu_0\mu}.$$

Поток энергии, приходящей сверху на единичную площадку, равен $\overline{\Pi}_z^0 + \overline{\Pi}_z^+$, а поток энергии, уходящей вниз, равен $\overline{\Pi}_z^-$. Легко проверить, что выполняется равенство (без $2\omega\mu_0\mu$)

$$-k_+|A^0|^2\cos\theta^0 + k_+|A^+|^2\cos\theta^+ = -k_-|A^-|^2\cos\theta^-.$$

В случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля рассуждения точно такие же. При этом

$$H_y = u, \qquad E_x = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad E_z = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

и условия сопряжения на границе раздела сред для потенциальных функций трех волн (падающей, отраженной и преломленной) имеют вид

$$\frac{1}{\varepsilon_+}\,\frac{\partial u^0}{\partial z}(x,0) + \frac{1}{\varepsilon_+}\,\frac{\partial u^+}{\partial z}(x,0) = \frac{1}{\varepsilon_-}\,\frac{\partial u^-}{\partial z}(x,0), \qquad u^0(x,0) + u^+(x,0) = u^-(x,0).$$

Следовательно, если считать, что все волны – плоские, то и в этом случае

$$k_+\sin\theta^0 = k_+\sin\theta^+ = k_-\sin\theta^-.$$

Уравнения для определения амплитуд волн и формулы Френеля будут немного иными:

$$A^+ = \frac{\sqrt{\varepsilon_-}\cos\theta^0 - \sqrt{\varepsilon_+}\cos\theta^-}{\sqrt{\varepsilon_-}\cos\theta^0 + \sqrt{\varepsilon_+}\cos\theta^-}A^0, \quad A^- = \frac{2\sqrt{\varepsilon_-}\cos\theta^0}{\sqrt{\varepsilon_-}\cos\theta^0 + \sqrt{\varepsilon_+}\cos\theta^-}A^0.$$