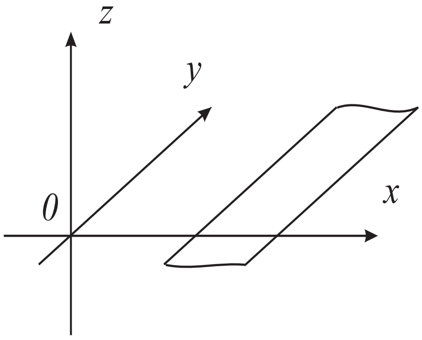
*[mmwe03.tex, 29.05.16]*

**Дифракция электромагнитной волны на плоском экране**

Пусть теперь на границе раздела сред $z = 0$ размещен бесконечно тонкий идеально проводящий экран. Ограничимся случаем, когда *экран – бесконечная лента*, расположенная вдоль оси $y$ и компоненты поля не зависят от координаты $y$. Будем рассматривать параллельно поляризованные электромагнитные волны.



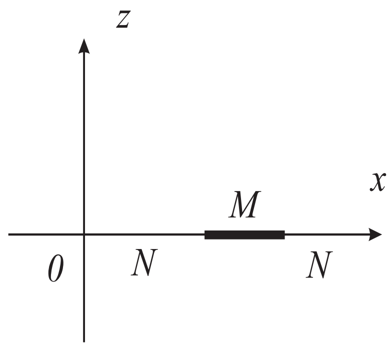




Рис. Плоский экран (лента)

В плоскости $xz$ ленте соответствует отрезок, который будем обозначать $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{N}$ – дополнение $\mathcal{M}$ до всей оси $x$.

Пусть задана электромагнитная волна с потенциальной функцией $u^0(x,z)$ (при $z > 0$ и при $z < 0$, если среды одинаковы). Будем искать отраженные вверх волны и прошедшие вниз волны, которым соответствуют потенциальные функции $u^+(x,z)$ и $u^-(x,z)$. На $\mathcal{N}$, как и раньше, без экрана, должны быть выполнены условия сопряжения

$$u^0 + u^+ = u^0 + u^-, \quad \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^+}{\partial z} = \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^-}{\partial z}.$$

На $\mathcal{M}$ должны быть выполнены граничные условия

$$u^0 + u^+ = 0, \quad u^0 + u^- = 0.$$

Примем *гипотезу*: отраженное и прошедшее поле являются наложением плоских волн вида

$$u(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)\, e^{-i\xi x \pm i\gamma(\xi) z}\, d\xi,$$

где

$$\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Пусть значения $\gamma(\xi)$ вычисляются так, что или это неотрицательные вещественные числа, или мнимые числа с положительной мнимой частью ($\operatorname{Re}\gamma(\xi) \geq 0$ или $\operatorname{Im}\gamma(\xi) > 0$). При вещественных $\gamma(\xi) > 0$ энергия переносится вдоль оси $z$ (или в противоположном направлении, это зависит от знака в экспоненте), при мнимых $\gamma(\xi)$ волны затухают. Поэтому будем искать

$$u^+(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi)\, e^{-i\xi x + i\gamma(\xi) z}\, d\xi, \quad z > 0,$$

и

$$u^-(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^-(\xi)\, e^{-i\xi x - i\gamma(\xi) z}\, d\xi, \quad z < 0.$$

В первом случае ищем *положительно ориентированные волны* (переносящие энергию в направлении оси $z$ или затухающие в этом направлении, а во втором случае – *отрицательно ориентированные волны.*

Напомним, что *интегральное преобразование Фурье* устанавливает соответствие между функциями $f(x)$ и $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi x}\, d\xi.$$

Следы (предельные значения) функции $u(x,z)$ и ее производной по $z$ при $z \to 0$ будем обозначать $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

При $z \to \pm 0$ имеем

$$u_0^+(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi) e^{-i\xi x}\, d\xi, \quad u_1^+(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) A^+(\xi) e^{-i\xi x}\, d\xi.$$

Отсюда следует

**Лемма 1.** *Функции $u_0^+(x)$ и $u_1^+(x)$ – следы на прямой $z = 0$ потенциальной функции положительно ориентированной волны тогда и только тогда, когда*

$$u_1^+(\xi) - i\gamma(\xi)\, u_0^+(\xi) = 0.$$

*Аналогично, функции $u_0^-(x)$ и $u_1^-(x)$ – следы на прямой $z = 0$ потенциальной функции отрицательно ориентированной волны тогда и только тогда, когда*

$$u_1^-(\xi) + i\gamma(\xi)\, u_0^-(\xi) = 0.$$

Теперь легко доказать еще одно утверждение.

**Лемма 2.** *Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна граничной задаче с условиями*

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Если $u_0^+(x) = u_0^-(x)$ при всех $x$, то $u_0^+(\xi) = u_0^-(\xi)$. Тогда $u_1^+(\xi) = -u_1^-(\xi)$ и $u_1^+(x) = -u_1^-(x)$. Поэтому $u_1^+(x) = 0$ на $\mathcal{N}$.

Из граничных условий на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ следует

**Теорема 1.** *Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} u_1^+(t)\, K_1(t,x)\, dt = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

*где*

$$K_1(t,x) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\, H_0^{(1)}(k|x_1 - x|).$$

Доказательство. Пусть $u_1^+(x)$ – искомая функция на $\mathcal{M}$ (на $\mathcal{N}$ эта функция равна нулю). Тогда

$$u_0^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)}\, u_1^+(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(x_1) e^{ix_1\xi}\, dx_1 \right) e^{-i\xi x}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)}\, e^{i\xi(x-x_1)}\, d\xi \right) dx_1.$$

Осталось вычислить внутренний интеграл.

В случае перпендикулярной поляризации электромагнитных волн рассуждения аналогичные. Отличие в том, что граничные условия имеют вид

$$u_1^0 + u_1^+ = 0, \quad u_1^0 + u_1^- = 0.$$

Лемма 1 остается без изменений. Вместо леммы 2 имеем

**Лемма 3.** *Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна граничной задаче с условиями*

$$u_1^+(x) = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Если $u_1^+(x) = u_1^-(x)$ при всех $x$, то $u_1^+(\xi) = u_1^-(\xi)$. Тогда $u_0^+(\xi) = -u_0^-(\xi)$ и $u_0^+(x) = -u_0^-(x)$. Поэтому $u_0^+(x) = 0$ на $\mathcal{N}$.

Из граничных условий на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ следует

**Теорема 2.** *Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} u_0^+(t)\, K_2(t,x)\, dt = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

*где*

$$K_2(t,x) = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\frac{k}{|x_1 - x|}\, H_1^{(1)}(k|x_1 - x|).$$

Доказательство. Пусть $u_0^+(x)$ – искомая функция на $\mathcal{M}$ (на $\mathcal{N}$ эта функция равна нулю). Тогда

$$u_1^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi)\, u_0^+(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(x_1)e^{ix_1\xi}\, dx_1\right)e^{-i\xi x}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi)\, e^{i\xi(x-x_1)}\, d\xi\right) dx_1.$$

Внутренний интеграл также вычисляется.

Таким образом, в результате некоторых формальных действий (но их можно строго обосновать) мы перешли от задач дифракции к интегральным уравнениям. Можно показать, что в первом случае *ядро интегрального уравнения имеет логарифмическую особенность*, а во втором случае ядро является гиперсингулярным.