[mmwe04.tex, 30.05.16]

4. Дифракция электромагнитной волны на периодической решетке

Пусть на границе раздела сред $z = 0$ размещена l-периодическая решетка из бесконечно тонких идеально проводящих лент. Предположим, что среды над решеткой и под решеткой одинаковы. Сверху на решетку набегает плоская параллельно поляризованная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = e^{-ik\sin\theta^0\cdot x - ik\cos\theta^0\cdot z}, \quad z > 0$$

(считаем, что эта волна задана только над решеткой).

Обозначим через $\mathcal{M}$ часть отрезка $[0, l]$, занятого лентами (или только одной лентой) и через $\mathcal{N}$ – оставшуюся часть отрезка.

Как и в случае одной ленты (или конечного числа лент), нужно искать решения уравнения Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$, удовлетворяющие граничным условиям на $\mathcal{M}$ и условиям сопряжения на $\mathcal{N}$. Также нужно учитывать условия на бесконечности, то есть искать волны, уходящие на бесконечность от решетки.

Можно доказать, что потенциальные функции отраженной волны и прошедшей волны могут быть только *квазипериодическими функциями* (*волнами Флоке*) вида

$$u^1(x, z) = e^{i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \quad z > 0,$$

$$u^2(x, z) = e^{i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \quad z < 0.$$

Здесь

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \Big(\frac{2\pi}{l}n + \alpha\Big)^2}, \quad \operatorname{Re}\gamma_n > 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Im}\gamma_n > 0.$$

Теорема 1. *Задача дифракции эквивалентна парному сумматорному функциональному уравнению*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = -1, \quad x \in \mathcal{M}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n\, e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Запишем условия сопряжения и граничные условия на прямой $z = 0$:

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = 0, \qquad u^2(x, 0) = 0 \qquad \text{на} \quad \mathcal{M},$$

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \qquad \frac{\partial u}{\partial z}^0(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0) \qquad \text{на} \quad \mathcal{N}.$$

Очевидно, *параметр Флоке* α должен быть равен $-k\sin\theta^0$.

Так как $u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0)$ и на $\mathcal{M}$, и на $\mathcal{N}$, то

$$a_n = b_n, \quad n \neq 0, \qquad 1 + a_0 = b_0.$$

Исключим неизвестные b_n и получим ПСФУ из формулировки теоремы.

Чтобы преобразовать ПСФУ в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, нужно получить одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Имеет место интегрально-сумматорное тождество*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \int_0^l \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt}\Big)\Big(\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_m}e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)}\Big)\,dt.$$

Легко проверить, что это равенство выполняется (если только сходятся ряды).

Теорема 2. *ПСФУ сводится к БСЛАУ*

$$l\,a_k - \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_m}\,I_{n-m}\,J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Доказательство. Сумма ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

известна на $\mathcal{M}$ (она равна -1). Выражение для этой суммы на $\mathcal{N}$ получим с помощью ИСТ. Обозначим

$$I_n = \int\limits_{\mathcal{M}} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}\,dx, \qquad J_n = \int\limits_{\mathcal{N}} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}\,dx.$$

Эти интегралы вычисляются явно. Тогда на $\mathcal{N}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \int\limits_{\mathcal{M}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt}\right)\left(\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_m}e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_m}e^{i\frac{2\pi}{l}mx}\int\limits_{\mathcal{M}} e^{i\frac{2\pi}{l}(n-m)t}\,dt = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_m}e^{i\frac{2\pi}{l}mx}\,I_{n-m}.$$

По сумме ряда Фурье найдем коэффициент Фурье с номером k, то есть умножим обе части парного равенства (часть его задана на $\mathcal{N}$, другая – на $\mathcal{N}$) на $e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Получим ИСТ.

Приближенное решение БСЛАУ можно найти *методом усечения* (или методом редукции). Нужно оставить конечное число неизвестных, столько же уравнений и решать конечную СЛАУ. При этом в сумме по m также нужно учитывать только конечное число слагаемых. Конечная СЛАУ имеет вид

$$l\,a_k - \frac{1}{l}\sum_{n=-N}^{N} a_n\gamma_n \sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{\gamma_m}\,I_{n-m}\,J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = -N\dots N.$$

Имеем *два параметра усечения*: N и M. Вычислительный эксперимент показал, что M лучше брать немного большим, чем N (хотя и не во всех случаях).

Проверка правильности результатов счета сводится обычно к трем шагам:
1) *внутренняя сходимость* (при увеличении N последовательность приближенных значений a_n должна сходиться);
2) *закон сохранения энергии* (сколько энергии пришло на плоскость $z = 0$ с заданной плоской волной, столько и должно уйти с отраженной и прошедшей волнами);
3) *граничное условие на металле.*

При проверке закона сохранения энергии нужно вычислить потоки энергии трех волн через полосу периода, отнесенных на единицу длины по координате y, то есть интегралы по отрезку $[0, l]$ от z-компоненты среднего по периоду изменения времени значения вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}$. Сумма потоков энергии отраженной вверх и прошедшей вниз волн должна быть равна потоку энергии волны, падающей на решетку сверху.

Потенциальная функция квазипериодической волны общего вида

$$u(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n e^{i\gamma_n z} + b_n e^{-i\gamma_n z}\right] e^{i(\alpha + \frac{2\pi}{l}n)x},$$

z-компонента среднего значения вектора Пойнтинга

$$\overline{\Pi}_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(-E_y\,H_x^*) = \frac{1}{2\omega\mu_0\mu}\,\mathrm{Re}\left(i\,u\,\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)$$

и поток энергии через полосу периода (точнее, поток через прямоугольник шириной l и длиной q, разделенный на q)

$$P = \int_0^l \overline{\Pi}_z\big|_{z=0}\, dx.$$

Так как

$$i\, u\, \frac{\partial u^*}{\partial z}\Big|_{z=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n) e^{i(\alpha+\frac{2\pi}{l}n)x} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n_1}^* (a_{n_1}^* - b_{n_1}^*) e^{-i(\alpha+\frac{2\pi}{l}n_1)x},$$

то после интегрирования

$$P = \frac{l}{2\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n)\gamma_n^*(a_n^* - b_n^*) = \frac{l}{2\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n^* \big[|a_n|^2 - |b_n|^2 + 2i \operatorname{Im}(a_n^* b_n)\big].$$

Таким образом, поток энергии квазипериодической волны состоит из трех слагаемых (без общего множителя):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\gamma_n\, |a_n|^2, \quad -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\gamma_n\, |b_n|^2, \quad 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}\gamma_n \cdot \operatorname{Im}(a_n^* b_n).$$

Первые два выражения определяют потоки энергии гармоник, распространяющихся вверх и вниз соответственно. В этих суммах учитывается фактически только конечное число слагаемых – тех, в которых стоят вещественные множители γ_n. Третье "неудобное" выражение состоит из слагаемых с мнимыми значениями γ_n. Это выражение равно нулю, если в потенциальной функции квазипериодической волны в случае мнимых γ_n или $a_n = 0$, или $b_n = 0$. Так как в рассматриваемой задаче дифракции на ленты сверху падает плоская волна, то только $b_0 \neq 0$ и при этом γ_0 – вещественное число. Поэтому для поля над решеткой поток энергии характеризует величина

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |a_n|^2 - \gamma_0 |b^0|^2.$$

Аналогично, для поля под решеткой

$$-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |b_n|^2.$$

Следовательно, закон сохранения энергии для задачи дифракции имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |a_n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |b_n|^2 = \gamma_0 |b^0|^2,$$

здесь не поставлен множитель $\frac{l}{2\omega\mu_0\mu}$ и, напомним, в суммах учитываются только слагаемые с вещественными γ_n.

Случай перпендикулярной поляризации поля рассматривается точно так же. Пусть в верхней полуплоскости задана потенциальная функция плоской волны

$$u^0(x,z) = e^{-ik\sin\theta\cdot x - ik\cos\theta\cdot z}.$$

Будем искать потенциальные функции отраженного и прошедшего вниз поля в виде

$$u^1(x,z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \qquad u^2(x,z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}.$$

Если над решеткой и под решеткой одна и та же среда, то граничные условия на $\mathcal{M}$ сводятся к равенствам

$$-k\cos\theta + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, \gamma_n\, e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, \gamma_n\, e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0.$$

Условия сопряжения на $\mathcal{N}$ дают

$$-k\cos\theta + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\gamma_n\,e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\,\gamma_n\,e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

и

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\,e^{i\frac{2\pi}{l}nx}.$$

Отсюда $-1 + a_0 = -b_0$ и $a_n = -b_n$ при $n \neq 0$. Тогда имеем ПСФУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\gamma_n\,e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \gamma_0 \quad \text{на} \quad \mathcal{M}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{N}.$$

Это ПСФУ с помощью интегрально-сумматорного тождества

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt}\right)\left(\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)}\right) dt$$

преобразуется в БСЛАУ

$$-l\,a_k\,\gamma_k + \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m\,I_{n-m}\,J_{m-k} = -a^0\,\gamma_0\,I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$