[mmwe08.tex, 24.05.16]

8. Криволинейная граница раздела сред

Если граница раздела сред не является координатной поверхностью (или линией в плоском случае), то процесс решения задач сопряжения для уравнений Максвелла усложняется.

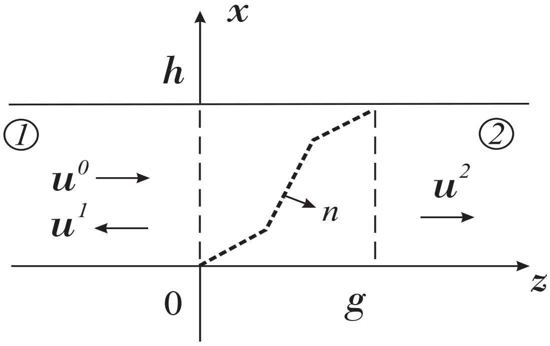

Рис. Криволинейная граница раздела сред

Рассмотрим задачу дифракции TE-волны в плоском волноводе на криволинейной границе раздела сред (см. рисунок). Среда слева имеет свойства ε_1, μ, среда справа имеет свойства ε_2, μ. Формулировка условий сопряжения не меняется: касательные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть непрерывны.

Напомним, что для TE-волн $\mathbf{E} = (0,\, E_y,\, 0)$ и $\mathbf{H} = (H_x,\, 0,\, H_z)$,

$$E_y = u, \qquad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_o\mu}\,\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_o\mu}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца.

Пусть граница раздела сред задана функцией $z = f(x)$, $\;0 \le x \le h$. Если нормаль к границе $\mathbf{n} = (n_x(x),\, 0,\, n_z(x))$, то

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = (-n_z E_y,\, 0,\, n_x E_y), \qquad [\mathbf{n}, \mathbf{H}] = (0,\, n_z H_x - n_x H_z,\, 0).$$

Следовательно, на границе раздела сред должны быть непрерывны функции u и $n_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + n_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Обозначим

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\frac{\pi n}{h}h, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть

$$u^0(x, z) = a_l^0\, e^{i\gamma_l^1 z}\varphi_l(x).$$

– потенциальная функция волны, набегающей на границу раздела сред слева. Будем искать потенциальные функции отраженной волны и прошедшей вправо волны в виде

$$u^1(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1\, e^{-i\gamma_n^1 z}\varphi_n(x), \quad u^2(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, e^{i\gamma_n^2 z}\varphi_n(x).$$

Условия сопряжения дают равенства

$$a_l^0\, e^{i\gamma_l^1 f(x)}\,\varphi_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1\, e^{-i\gamma_n^1 f(x)}\,\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, e^{i\gamma_n^2 f(x)}\,\varphi_n(x),$$

$$a_l^0\, e^{i\gamma_l^1 f(x)}\left[n_x(x)\varphi_l'(x) + n_z(x)\, i\gamma_l^1\,\varphi_l(x)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1\, e^{-i\gamma_n^1 f(x)}\left[n_x(x)\varphi_n'(x) - n_z(x)\, i\gamma_n^1\,\varphi_n(x)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, e^{i\gamma_n^2 f(x)} \left[n_x(x)\varphi_n'(x) + n_z(x)\, i\gamma_n^2\, \varphi_n(x)\right].$$

Обозначим

$$\psi_l^0(x) = e^{i\gamma_l^1 f(x)}\, \varphi_l(x), \qquad \psi_n^1(x) = e^{-i\gamma_n^1 f(x)}\, \varphi_n(x), \qquad \psi_n^2(x) = e^{i\gamma_n^2 f(x)}\, \varphi_n(x),$$

$$\chi_l^0(x) = e^{i\gamma_l^1 f(x)} \left[n_x(x)\varphi_l'(x) + n_z(x)\, i\gamma_l^1\, \varphi_l(x)\right],$$

$$\chi_n^1(x) = e^{-i\gamma_n^1 f(x)} \left[n_x(x)\varphi_n'(x) - n_z(x)\, i\gamma_n^1\, \varphi_n(x)\right],$$

$$\chi_n^2(x) = e^{i\gamma_n^2 f(x)} \left[n_x(x)\varphi_n'(x) + n_z(x)\, i\gamma_n^2\, \varphi_n(x)\right].$$

Тогда имеем пару сумматорных функциональных уравнений

$$a_l^0\, \psi_l^0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1\, \psi_n^1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, \psi_n^2(x),$$

$$a_l^0\, \chi_l^0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1\, \chi_n^1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, \chi_n^2(x).$$

Чтобы исключить неизвестные a_n^2, нужно построить ИСТ вида

$$\int_0^h \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, \chi_n^2(t)\Big)\, K(t,x)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\, \psi_n^2(x).$$

Будем искать ядро интегрального преобразования в виде

$$K(t,x) = \sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{s=1}^{+\infty} K_{rs}\, \varphi_r(t)\, \varphi_s(x).$$

Приравняем коэффициенты при a_n^2 в левой и правой частях ИСТ. Тогда

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} K_{rs} \Big(\int_0^h \chi_n^2(t)\, \varphi_r(t)\, dt\Big)\, \varphi_s(x) = \psi_n^2(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Спроектируем их на функции $\varphi_m(x)$ и получим

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \chi_{nr}^2\, K_{rm} = \psi_{nm}^2, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Здесь

$$\chi_{nr}^2 = \int_0^h \chi_n^2(t)\, \varphi_r(t)\, dt, \qquad \psi_{nm}^2 = \int_0^h \psi_n^2(x)\, \varphi_m(x)\, dx.$$

Мы получили не просто БСЛАУ, а бесконечную систему из БСЛАУ. Эта система уравнений может быть записана как линейное матричное уравнение $\mathrm{X}K = \Psi$ для бесконечных матриц. Отсюда определяются числа K_{rs}.

Преобразуем два сумматорных уравнения, которые были получены из условий сопряжения, следующим образом. Во втором уравнении заменим x на t, умножим на $K(t,x)$ и проинтегрируем по x от 0 до h. Результат вычтем из первого уравнения. Тогда получим

$$a_l^0 \left[\psi_l^0(x) - \int_0^h \chi_l^0(t) K(t,x)\, dt\right] + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \left[\psi_n^1(x) - \int_0^h \chi_n^1(t) K(t,x)\, dt\right] = 0.$$

Это уравнение можно рассматривать как ИУ относительно функции

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \, \varphi_n(x).$$

Но лучше спроектировать его на $\varphi_k(x)$ и перейти к БСЛАУ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \, P_{kn} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где

$$P_{kn} = \psi_{nk}^1 - \sum_{r=1}^{+\infty} K_{rk} \chi_{nr}^1, \qquad Q_k = a_l^0 \left[-\psi_{lk}^0 + \sum_{r=1}^{+\infty} K_{rk} \chi_{lr}^0 \right],$$

где

$$\psi_{nk}^1 = \int_0^h \psi_n^1(x) \, \varphi_k(x) \, dx, \quad \chi_{nr}^1 = \int_0^h \chi_n^1(t) \, \varphi_r(t) \, dt, \quad \psi_{lk}^0 = \int_0^h \psi_l^0(x) \, \varphi_k(x) \, dx, \quad \chi_{lr}^0 = \int_0^h \chi_l^0(t) \, \varphi_r(t) \, dt.$$

В итоге задача дифракции на криволинейной границе раздела сред в плоском волноводе свелась к двум БСЛАУ, которые нужно решать последовательно.

При приближенных расчетах усечение бесконечных систем уравнений проводится следующим образом. Вторая БСЛАУ заменяется на конечную СЛАУ

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^1 \, P_{kn} = Q_k, \qquad k = 1 \,..\, N,$$

N – параметр усечения. Тогда интегралы ψ_{lk}^0 нужно вычислять при фиксированном l и при $k = 1 \,..\, N$, а интегралы ψ_{nk}^1 – при $n = 1 \,..\, N$, $k = 1 \,..\, N$. Второй параметр усечения R, вероятно, нужно выбрать так, чтобы $R \geq N$. Тогда χ_{lr}^0 вычисляются при фиксированном l и при $r = 1 \,..\, R$, а χ_{nr}^1 – при $n = 1 \,..\, N$, $r = 1 \,..\, R$.

Коэффициенты K_{rk} в ядре интегрального преобразования будут нужны при $r = 1 \,..\, R$, $k = 1 \,..\, N$.

Первая БСЛАУ после усечения имеет вид

$$\sum_{r=1}^{R} \chi_{nr}^2 \, K_{rm} = \psi_{nm}^2, \qquad n = 1 \,..\, R, \quad m = 1 \,..\, N.$$

Поэтому предварительно должны быть найдены значения интегралов χ_{nr}^2 и ψ_{nm}^2 при $n = 1 \,..\, R$, $r = 1 \,..\, R$, $m = 1 \,..\, N$.

В одном частном случае интегралы, входящие в коэффициенты БСЛАУ, можно вычислить явно. Пусть $f(x) = Tx$, где $T = g/h = \mathrm{tg}\alpha$ (наклонная граница раздела сред). Тогда $n_x = -\cos\alpha$, $n_z = \sin\alpha$.

Что изменится, если на границе раздела сред имеется идеально проводящая бесконечно тонкая пластина?

Предположим для простоты рассуждений, что экран $\mathcal{M}$ расположен на условной границе раздела сред, $\gamma_n^1 = \gamma_n^2 = \gamma_n$. Пусть также волна от внешнего источника задана и слева, и справа от экрана. Тогда на $\mathcal{N}$ (на дополнении экрана до всей границы раздела)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \, \psi_n^1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \, \psi_n^2(x), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \, \chi_n^1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \, \chi_n^2(x),$$

и на $\mathcal{M}$

$$a_l^0 \, \psi_l^0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^1 \, \psi_n^1(x) = 0, \qquad a_l^0 \, \psi_l^0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \, \chi_n^2(x) = 0.$$

....