[mmwe09.tex, 24.05.16]

9. Возмущение собственных волн

Исследуем, как меняются собственные волны волноводных структур при наличии дополнительных диэлектрических пластин, стержней или ограниченных тел.

Пусть плоский волновод ограничен тонкими проводящими пластинами $x = 0$ и $x = h$. Предположим, как и раньше, что компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от координаты y. Рассмотрим случай TE-поляризации электромагнитного поля. Было установлено, что если k – постоянная величина (среда однородная), то ненулевые компоненты собственных волн (положительно ориентированных) выражаются через потенциальные функции

$$u_n(x,z) = e^{i\gamma_n z}\sin\frac{\pi n}{h}x, \qquad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

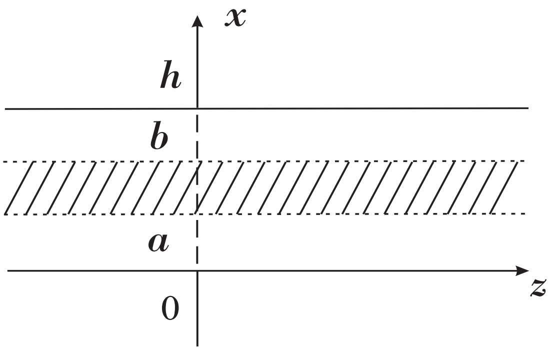

Рис. Диэлектрическая пластина в плоском волноводе

Пусть внутрь волновода вставлена диэлектрическая пластина $\alpha < x < \beta$ (см. рисунок), причем свойства диэлектрика таковы, что соответствующее ему волновое число $k_1 > k$. Следует ожидать, что постоянные распространения возмущенных собственных волн изменятся (вещественные постоянные увеличатся).

Будем искать найти значения параметра γ, при которых уравнение Гельмгольца с кусочно постоянным коэффициентом $k(x)$ имеет ненулевые решения вида $u(x,z) = f(x)e^{i\gamma z}$ (потенциальные функции собственных волн), удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения.

Функция $f(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$f''(x) + [k^2(x) - \gamma^2]\, f(x) = 0$$

в интервалах $(0, \alpha)$, (α, β) и (β, h). Здесь $k(x)$ – кусочно постоянная функция. Общее решение этого уравнения можно записать через две экспоненты, а можно и через синус и косинус. Должны быть выполнены граничные условия $f(0) = 0$, $f(h) = 0$ и условия сопряжения $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$, $f'(\alpha - 0) = f'(\alpha + 0)$, $f(\beta - 0) = f(\beta + 0)$, $f'(\beta - 0) = f'(\beta + 0)$.

Пусть $f(x) = A\sin\delta x + B\cos\delta x$ при $0 < x < \alpha$, где $\delta = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$ (вещественное положительное число или мнимое число с положительной мнимой частью). Из первого граничного условия следует, что $B = 0$. Поэтому остается $f(x) = A\sin\delta x$ при $0 < x < \alpha$.

Пусть $f(x) = C\sin\delta(h - x) + D\cos\delta(h - x)$ при $\beta < x < h$. Смещение аргумента на h сделано для сокращения формул. Из второго граничного условия следует, что $D = 0$. Поэтому остается $f(x) = C\sin\delta(h - x)$ при $\beta < x < h$.

При $\alpha < x < \beta$ имеем $f(x) = E\sin\delta_1 x + F\cos\delta_1 x$, где $\delta_1 = \sqrt{k_1^2 - \gamma^2}$. Условия сопряжения при $x = \alpha$ и $x = \beta$ дают равенства

$$\begin{aligned}
&A\sin\delta\alpha = E\sin\delta_1\alpha + F\cos\delta_1\alpha,\\
&A\delta\cos\delta\alpha = E\delta_1\cos\delta_1\alpha - F\delta_1\sin\delta_1\alpha,\\
&E\sin\delta_1\beta + F\cos\delta_1\beta = C\sin\delta(h - \beta),\\
&E\delta_1\cos\delta_1\beta - F\delta_1\sin\delta_1\beta = -C\delta\cos\delta(h - \beta).
\end{aligned}$$

Эта СЛАУ относительно неизвестных A, C, E, F имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Поэтому для вычисления возмущенных постоянных распространения имеем *трансцендентное уравнение*

$$\begin{vmatrix} \sin\delta\alpha & 0 & -\sin\delta_1\alpha & -\cos\delta_1\alpha \\ \delta\cos\delta\alpha & 0 & -\delta_1\cos\delta_1\alpha & \delta_1\sin\delta_1\alpha \\ 0 & -\sin\delta(h-\beta) & \sin\delta_1\beta & \cos\delta_1\beta \\ 0 & \delta\cos\delta(h-\beta) & \delta_1\cos\delta_1\beta & -\delta_1\sin\delta_1\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Искать его решения – достаточно сложная задача (помним, что от γ зависят выражения δ и δ_1).

Заметим, что от СЛАУ четвертого порядка легко перейти к СЛАУ второго порядка, если исключить из уравнений неизвестные A и C. Эту операцию можно интерпретировать следующим образом: граничное условие для дифференциального уравнения второго порядка на одном конце отрезка переносится на другой его конец. Например, если общее решение уравнения в интервале (x_1, x_2) имеет вид $f(x) = c_1\sin\delta x + c_2\cos\delta x$ и задано условие $f'(x_1) + a\,f(x_1) = 0$, то это условие устанавливает связь между постоянными c_1 и c_2. Поэтому в решении уравнения остается только одна произвольная постоянная. Вычислим $f'(x_2)$ и $f(x_2)$, выразим произвольную постоянную через эти значения и приравняем полученные выражения. Получим новое граничное условие, но уже на другом конце отрезка.

В рассматриваемом случае нетрудно свести задачу о возмущенных собственных волнах к краевой задаче для дифференциального уравнения $f''(x) + [k_1^2 - \gamma^2]\,f(x) = 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Но этот прием можно использовать и в более общей задаче, когда пространство между стенками волновода заполнено кусочно слоистой средой. Если последовательно переносить граничные условия с одной границы слоев на другую границу, то через конечное число шагов придем к краевой задаче на одном слое, но с более сложными краевыми условиями.

Метод Галеркина решения задачи о собственных волнах возмущенного волновода сводится к следующему. Будем искать функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} c_m \sin\frac{\pi m}{h}x.$$

Граничные условия и условия сопряжения выполнены по построению. Потребуем, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла (приближенно) дифференциальному уравнению. Обозначим $\delta = \gamma^2$, так удобнее, и $\Delta K = k_1^2 - k^2$. Подставим выражение $f(x)$ в уравнение, тогда

$$-\sum_{m=1}^{M} c_m \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 \sin\frac{\pi m}{h}x + (k^2-\delta)\sum_{m=1}^{M} c_m \sin\frac{\pi m}{h}x + \chi_{[\alpha,\beta]}(x)\,\Delta K \sum_{m=1}^{M} c_m \sin\frac{\pi m}{h}x = 0,$$

и спроектируем это равенство на функции $\sin\dfrac{\pi n}{h}x$, $n = 1..M$. Здесь $\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$. Получим

$$\frac{h}{2}\left[k^2 - \delta - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right] c_n + \Delta K \sum_{m=1}^{M} c_m\, I_{m,n} = 0, \quad n = 1..M,$$

где

$$I_{m,n} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin\frac{\pi m}{h}x \sin\frac{\pi n}{h}x\,dx.$$

Эти интегралы легко вычислить явно. Теперь видно, что возможные значения δ – собственные значения некоторой матрицы, а числа c_m – компоненты соответствующих им собственных векторов. Ожидается, что таких собственных пар найдется ровно M.

Чтобы в ходе дальнейших рассуждений коэффициенты c_m определялись однозначно, введем нормировку $\max_{m=1\,..\,M}|c_m| = 1$. Кроме того, пусть при этом одно из чисел c_m, а именно c_{m_0}, точно равно единице.

Введем *параметр возмущения* $\varepsilon \in [0,1]$ и запишем уравнения спектральной задачи для моды с номером j так:

$$\frac{h}{2}\left[k^2-\delta_j-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right]c_n^j+\varepsilon\,\Delta K\sum_{m=1}^{M}c_m^j\,I_{m,n}=0,\quad n=1..M.$$

При $\varepsilon=0$ решение задачи на собственные значения известно – это моды невозмущенного плоского волновода, а именно $\delta_j=\gamma_j^2$, и вектор c^j имеет компоненту $c_j^j=1$, а остальные компоненты – нули (то есть $m_0=j$).

Нужно построить решение этой задачи при $\varepsilon=1$. Это можно сделать за один большой шаг, а можно за несколько мелких шагов.

Итак, предположим, что при некотором ε решение спектральной задачи известно. Что изменится, если вместо ε взять $\varepsilon+\Delta\varepsilon$?

Обозначим через $\Delta\delta_j$ и Δc^j приращения собственного значения и собственного вектора с номером j. В уравнениях

$$\frac{h}{2}\left[k^2-\delta_j-\Delta\delta_j-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right](c_n^j+\Delta c_n^j)+(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\,\Delta K\sum_{m=1}^{M}(c_m^j+\Delta c_m^j)\,I_{m,n}=0,\quad n=1..M,$$

раскроем скобки и используем равенства, которым удовлетворяют δ_j и c^j. Получим

$$\frac{h}{2}\left[k^2-\delta_j-\Delta\delta_j-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right]\Delta c_n^j-\frac{h}{2}\,\Delta\delta_j\,c_n^j+\varepsilon\,\Delta K\sum_{m=1}^{M}I_{m,n}\,\Delta c_m^j+$$

$$+\Delta\varepsilon\,\Delta K\sum_{m=1}^{M}I_{m,n}\,(c_m^j+\Delta c_m^j)=0,\quad n=1..M.$$

Наиболее простым приближенным методом решения задачи является *метод возмущений первого порядка.* Отбросим слагаемые второго порядка малости (произведения приращений) и получим СЛАУ для Δc_m^j

$$\frac{h}{2}\left[k^2-\delta_j-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right]\Delta c_n^j+\varepsilon\,(k_1^2-k^2)\sum_{m=1}^{M}I_{m,n}\,\Delta c_m^j=\frac{h}{2}\,c_n^j\,\Delta\delta_j-\Delta\varepsilon\,\Delta K\sum_{m=1}^{M}I_{m,n}\,c_m^j,\quad n=1..M.$$

Решение этой неоднородной системы уравнений существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{M}c_n^j\left[\frac{h}{2}\,c_n^j\,\Delta\delta_j-\Delta\varepsilon\,(k_1^2-k^2)\sum_{m=1}^{M}I_{m,n}\,c_m^j\right]=0$$

(это условие ортогональности вектора правых частей ненулевому решению однородной СЛАУ, матрица коэффициентов – симметричная). Отсюда определяется величина $\Delta\delta_j$. Затем находятся значения Δc_m^j, причем можно принять $\Delta c_{m_0}^j=0$, найти остальные неизвестные, и на последнем этапе провести нормировку.

При $\varepsilon=0$ все существенно проще. Уравнение с номером j имеет вид

$$0=\frac{h}{2}\,\Delta\delta_j-\Delta\varepsilon\,(k_1^2-k^2)\,I_{j,j}.$$

Отсюда находится $\Delta\delta_j$. Из уравнений при $n\neq j$

$$\frac{h}{2}\left[\left(\frac{\pi j}{h}\right)^2-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right]\Delta c_n^j=-\Delta\varepsilon\,(k_1^2-k^2)\,I_{j,n}$$

определяются Δc_n^j, а Δc_j^j полагаем равным нулю.

Если не пренебрегать величинами второго порядка малости, то можно построить *итерационный процесс* для вычисления значений $\Delta\delta_j$ и Δc^j.

Чтобы приращения $\Delta\delta_j$ и Δc^j определились однозначно, зададим $\Delta c^j_{m_0} = 0$. Уравнение с номером m_0 из СЛАУ перепишем так:

$$\frac{h}{2}\,\Delta\delta_j = \varepsilon\,\Delta K \sum_{m=1}^{M} I_{m,m_0}\,\Delta c^j_m + \Delta\varepsilon\,(k_1^2 - k^2) \sum_{m=1}^{M} I_{m,m_0}\,(c^j_m + \Delta c^j_m).$$

Остальные уравнения этой системы уравнений преобразуем к виду

$$\frac{h}{2}\left[k^2 - \delta_j - \Delta\delta_j - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right]\Delta c^j_n = \frac{h}{2}\,\Delta\delta_j\,c^j_n - \varepsilon\,\Delta K \sum_{m=1}^{M} I_{m,n}\,\Delta c^j_m -$$

$$-\Delta\varepsilon\,\Delta K \sum_{m=1}^{M} I_{m,n}\,(c^j_m + \Delta c^j_m), \quad n = 1..M, \;\; n \neq m_0.$$

Зададим начальное приближение $\Delta c^j_n = 0$ и будем в цикле вычислять $\Delta\delta_j$ и Δc^j_n (при $n \neq m_0$) – заданное число раз или пока не будет достигнута заданная погрешность.

При $\varepsilon = 0$ вычислительная схема немного проще.

После того, как этот цикл завершится, проведем нормировку уточненного вектора $c^j + \Delta c^j$. При этом может измениться номер m_0.

Как выбирать значение $\Delta\varepsilon$? Во-первых, должен сходиться итерационный процесс. Если сходимости нет, имеет смысл уменьшить значение $\Delta\varepsilon$. Во-вторых, вероятно, соответствующие $\Delta\varepsilon$ приращения $\Delta\delta_j$ должны быть относительно небольшими – такими, чтобы собственные значения δ_j не перемешивались. Иными словами, чтобы сохранилась упорядоченность этих значений после пересчета.

Точно такие же рассуждения можно использовать, если нужно найти *собственные волны прямоугольного волновода с диэлектрическим стержнем* или *собственные частоты прямоугольного резонатора с диэлектрической вставкой.*

. . . .