[DEshr2.tex, 11.12.12]

Плещинский Н.Б.

Дифференциальные уравнения: конспект лекций

Издание второе, исправленное и дополненное

Этот текст — не учебное пособие. Это всего лишь конспект лекций, написанный самим лектором. Кое-что написано немного не так, как это было или будет на лекциях. Как и в первой версии (2009), длинные доказательства сокращены, а некоторые простые и короткие — вообще отсутствуют. Решения примеров не приводятся.

Благодарю всех, кто указал на неточности и опечатки в первом издании. *PNB*

Литература (любое издание):

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.
2. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные ДУ и основы вариационного исчисления.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

1. Введение в теорию ДУ

Дифференциальные уравнения (ДУ) — основа математических моделей физических и других явлений и процессов. Основная цель теории ДУ — разработка методов поиска решений дифференциальных уравнений и исследование их свойств.

1.1. Основные определения и терминология

Уравнение называется *дифференциальным*, если в нем содержатся производные искомых функций или дифференциалы величин, зависимости между которыми нужно найти.

Обыкновенное ДУ порядка m имеет вид
$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (1)$,
здесь x — независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция. По традиции аргументы у искомой функции и ее производных не пишутся.

Уравнение 1-го порядка в дифференциалах : $F(x, y, dx, dy) = 0$. В ДУ *с частными производными* искомая функция зависит от двух и более независимых переменных.

Решением ДУ (1) называют такую функцию $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Подразумевается, что эта функция дифференцируема достаточное число раз, а области определения уравнения и его решения согласованы.

По умолчанию все рассматриваемые функции принимают вещественные значения, но комплекснозначные решения ДУ также будут рассматриваться.

Любое конкретное решение ДУ называют его *частным решением. Общим решением* называется формула, содержащая одну или несколько произвольных постоянных, по которой могут быть получены частные решения. У ДУ могут быть также *особые решения*, которые, как правило, не выводятся из общего решения. Точное определение будет дано позже.

Самый простой пример ДУ : $y' = f(x)$. Все его решения дает формула (общее решение) $y = \int f(x)\, dx + C$, где C — произвольная постоянная.

Если решение ДУ выражено через элементарные функции, то говорят, что оно найдено *в явном виде.* Если решение записано через элементарные функции и интегралы от них, то оно найдено *в квадратурах.* Решение (приближенное) ДУ может быть также найдено в виде таблицы или графика.

В некоторых случаях удается только доказать, что решение существует. Есть уравнения, решения которых существуют, не могут быть получены в квадратурах. Например, $y' = x^2 + y^2$.

Слова "в явном виде" не предполагают, что решение найдено как явная функция. Оно может быть записано также в неявной или в параметрической форме.

Чтобы выделить конкретное решение из множества всех решений ДУ, нужно задать дополнительные условия. Для ДУ 1-го порядка обычно задают *условие Коши* : $y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл этого условия — график решения проходит через заданную точку.

Графики решений ДУ называют *интегральными кривыми.*

Если ДУ имеет вид $y' = f(x,y)$, то в каждой точке плоскости с координатами (x,y) известно направление интегральной кривой, проходящей через эту точку. На этом основан *метод изоклин* — графический метод решения ДУ.

Изоклина — это геометрическое место точек, в которых интегральные кривые ДУ имеют одно и то же направление. Уравнение изоклины $f(x,y) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к интегральной кривой относительно оси абсцисс. Идея следующая: выбрать несколько значений α, построить на плоскости соответствующие им изоклины и, начиная из некоторой точки, провести интегральную кривую так, чтобы она пересекала изоклины под нужным углом.

Пример: $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$.

1.2. Задачи, приводящиеся к ДУ

1. **Задача о радиоактивном веществе**. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его массе. Найти зависимость массы вещества от времени.

Уравнение $m'(t) = -k\,m(t),\ k>0$. Его решение $m(t) = c\,e^{-kt}$ или $m(t) = m(0)\,e^{-kt}$.

2. **Задача о пуле**. Пуля ударяет в доску толщиной 0.1 метра со скоростью 200 м/с и вылетает с другой стороны со скоростью 80 м/с. Найти время, в течение которого пуля находилась внутри доски. Указание: сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости.

Уравнение $m\,s'' = -k\,(s')^2$, здесь $s(t)$ — пройденный путь за время t.

3. **Задача о кривой.** Найти кривую на плоскости со следующим свойством: треугольник, образованный касательной к кривой и осями координат, имеет постоянную площадь.

Если построить такой треугольник и выразить его площадь через величины x, y и y' (тангенс угла наклона касательной), то получится ДУ : $(y - xy')\Big(x - \dfrac{y}{y'}\Big) = 2S$.

4. **Задача о зеркале.** Найти форму зеркала, которое отражает параллельно заданному направлению световые лучи, исходящие из точки.

Пусть (для простоты) зеркало является поверхностью вращения. Рассмотрим сечение искомой поверхности плоскостью, проходящей через ось симметрии. Тогда $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}$.

5. **Задача о растворе**. В баке имеется M литров раствора соли. Каждую секунду из бака вытекает m литров раствора, доливается столько же воды, и смесь перемешивается. Найти зависимость концентрации раствора от времени.

Пусть $x(t)$ — масса соли в баке в момент времени t. Как изменится эта величина за малый промежуток времени Δt? Очевидно, что $x(t+\Delta t) = x(t) - m\,\dfrac{x(t)}{M}\,\Delta t$. Поделим на Δt, перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$ и получим $x'(t) = -\dfrac{m}{M}\,x(t)$. Решение этого ДУ : $x(t) = x(0)\,e^{-\frac{m}{M}t}$.

1.3. Системы дифференциальных уравнений

Система обыкновенных ДУ может быть записана, например, так :
$F_j(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,\ \ j = 1\,..\,s \quad (2).$

Для систем ДУ графики решений обычно строятся в пространстве переменных $y_1, \ldots, y_n$. Это пространство называется *фазовым*, а интегральные кривые в нем — *траекториями*.

Пример: $y_1' = y_2,\ \ y_2' = -y_1$. Здесь изоклины в фазовом пространстве — прямые, проходящие через начало координат. Траектории должны пересекать их под прямым углом. Следовательно, эти траектории — окружности $y_1 = c\sin x,\ \ y_2 = c\cos x$ или $y_1 = c\cos x,\ \ y_2 = -c\sin x$.

Теорема. *Любая система ДУ приводится к системе уравнений первого порядка.*

Доказательство. Рассмотрим систему ДУ (2). Введем новые искомые функции:
$z_1 = y_1, z_2 = y_1', \ldots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \ldots, z_{m_1+1} = y_2, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n} = y_n^{(m_n-1)}$. Получим новую систему уравнений $F_j(x, z_1, z_2, \ldots, z_{m_1}, z_{m_1}', z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n}') = 0,\ j = 1\,..\,s$ и еще $z_1' = z_2,\ z_2' = z_3, \ldots, z_{m_1-1}' = z_{m_1}, \ldots,\ z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}' = z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2}, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n-1}' = z_{m_1+\ldots+m_n}$. •

Пример. $y'' + y = 0$. Если $y_1 = y,\ \ y_2 = y'$, то система уравнений 1-го порядка $y_1' = y_2,\ \ y_2' = -y_1$.

2. Уравнения 1-го порядка, разрешаемые в квадратурах

ДУ 1-го порядка, разрешенные относительно производной, записывают или *в нормальной форме* $y' = f(x,y)$ или *в дифференциалах* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$.

2.1. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой дифференциал некоторой функции. Следовательно, если $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, то решение этого уравнения $F(x,y) = C$.

Пример 1. $y\,dx + x\,dy = 0$.

Теорема 1. *Уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность доказывается в курсе мат. анализа :-) •

Пример 2. $y\,dx - x\,dy = 0$. Это уравнение — не в полных дифференциалах.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $p_1(x)\,p_2(y)\,dx + q_1(x)\,q_2(y)\,dy = 0$ называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Теорема 2. *Уравнение с разделяющимися переменными разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Поделим обе части уравнения на $p_2(y)q_1(x)$ (считаем, что это выражение — не нуль). Найдется функция, дифференциал которой совпадает с левой частью нового уравнения. Тогда эта функция — постоянная. Поэтому общее решение $\displaystyle\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,dx + \int \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\,dy = C$. •

Замечание. Следует проверить, не потеряны ли решения вида $q_1(x) = 0$ и $p_2(y) = 0$.

Уравнение в нормальной форме является уравнением с разделяющимися переменными, если $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$.

Пример 3. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.

Пример 4. $y' = \cos(x - y - 1)$. Здесь нужна замена искомой функции.

2.3. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения $P\,dx + Q\,dy = 0$, если после умножения на нее уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.

Был ли найден интегрирующий множитель для уравнения с разделяющимися переменными?

Теорема 3. *Если найдется такая функция $\omega(x,y)$, что*

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\,\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\,\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f[\omega(x,y)],$$ *то интегрирующий множитель $\mu = e^{\int f(\omega)\,d\omega}$.*

Доказательство. После умножения на интегрирующий множитель получим $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$. По теореме 1 должно выполняться равенство $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = 0$. Раскроем скобки и получим $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}\,P + \mu\,\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial \mu}{\partial x}\,Q - \mu\,\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Если $\mu = \mu[\omega(x,y)]$, то $\mu'\,\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\,P + \mu\,\dfrac{\partial P}{\partial y} - \mu'\,\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\,Q - \mu\,\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

Отсюда $$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\,\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\,\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f[\omega(x,y)].$$ Если правая часть — функция от μ, то μ легко найти. •

К сожалению, общего правила для выбора функции ω нет. Два самых простых частных случая: $\omega = x$ и $\omega = y$.

Пример 5. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$. Можно взять $\omega(x,y) = x^2 + y^2$.

2.4. Однородные уравнения и приводящиеся к ним

Уравнение вида $y' = f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ называется *однородным уравнением*. Эквивалентное определение: уравнение $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ называется однородным, если найдется такое α, что $P(tx,ty) = t^\alpha P(x,y),\ \ Q(tx,ty)=t^\alpha Q(x,y)\ \ \forall t,x,y$.

Теорема 4. *Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.*

Доказательство. Введем новую искомую функцию $z=\dfrac{y}{x}$. Если уравнение в нормальной форме, то $y'=z'x+z$ и тогда новое уравнение $z'x+z=f(z)$. Если уравнение в дифференциалах, то $dy=zdx+xdz$ и, следовательно, $[P(1,z)+Q(1,z)z]\,dx+Q(1,z)x\,dz=0$. $\bullet$

Пример 6. $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$.

Пример 7. $\Big(xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}\Big)\,dx-x^2\,dy=0$.

Следствие. *Уравнение вида* $y'=f\Big(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Big)$ *разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Если $d=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, то нужно ввести новую искомую функцию $z=a_1x+b_1y$. Если же $d\neq 0$, то y и x заменяются на $z=a_1x+b_1y+c_1$ и $t=a_2x+b_2y+c_2$. $\bullet$

Пример 8. $(x+y-2)\,dx-(x-y+4)\,dy=0$.

2.5. Линейные уравнения 1-го порядка

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ называется *линейным уравнением 1-го порядка.*

Теорема 5. *Линейное уравнение 1-го порядка разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Уравнение $y'+p(x)y=0$ имеет решение $y=C\,e^{-\int p(x)\,dx}$, где C — произвольная постоянная.

Будем искать решение исходного уравнения в виде $y=C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$, где $C(x)$ — новая искомая функция. $\bullet$

Пример 9. $y'+2y=x$.

Следствие. *Уравнение Бернулли* $y'+p(x)y=q(x)y^\alpha$ $(\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1)$ *разрешаемо в квадратурах.*

3. Существование и единственность решения задачи Коши

Докажем, что при некоторых условиях существует единственное решение ДУ
$y'=f(x,y)\quad(1)$,
удовлетворяющее условию
$y(x_0)=y_0\quad(2)$.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$.

Функция $g(y)$ удовлетворяет *условию Липшица* на множестве Y, если
$\exists L>0\mid |g(y_1)-g(y_2)|\le L\,|y_1-y_2|\ \ \forall y_1,y_2\in Y$. Число L — постоянная Липшица.

Условие Липшица сильнее, чем непрерывность, но слабее, чем дифференцируемость.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y, то в некоторой окрестности (x_0-h,x_0+h) точки x_0 существует единственное решение задачи Коши.*

План доказательства.
1. Перейдем от задачи Коши к интегральному уравнению (ИУ).
2. Построим специальную последовательность функций.
3. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится.
4. Докажем, что ее предел — решение ИУ.
5. Докажем вспомогательную лемму об интегральных неравенствах.
6. Докажем, что решение может быть только одно.

3.1. Существование решения

1. Перейдем от задачи Коши к интегральному уравнению (ИУ).

Пусть $y(x)$ — решение задачи Коши (1), (2), определенное в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$. Тогда выполняется тождество $y'(x) = f(x, y(x))\ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Интегрируем это тождество от x_0 до x:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \quad x \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad (3).$$

Получили, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3).

Если $y(x)$ — решение уравнения (3), то $y(x)$ является также решением задачи Коши. •

2. Построим последовательность функций по следующему правилу.

Пусть

$$\varphi_0(x) = y_0,\ \varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt \quad (4).$$

Чтобы эти формулы имели смысл, должно выполняться условие $|\varphi_n(x) - y_0| \le b\ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h),\ \ n = 0, 1, \ldots$

Выберем h так, чтобы это условие выполнялось. При $n = 0$ $|\varphi_0(x) - y_0| = 0 \le b$.

Обозначим $M = \max\limits_{(x,y) \in \Pi} |f(x, y)| \quad (5)$.

При $n = 1$ $|\varphi_1(x) - y_0| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt\right| \le M\,|x - x_0| \le Mh$.

Пусть $h = \min\left(\dfrac{b}{M}, a\right) \quad (6)$.

Тогда $|\varphi_1(x) - y_0| \le b$.

Применим метод математической индукции. Предположим, что $|\varphi_{n-1}(x) - y_0| \le b$ и оценим $|\varphi_n(x) - y_0| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt\right| \le Mh \le b$. •

3. Докажем, что последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится.

Рассмотрим функциональный ряд $\varphi_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (7)$.

Частичные суммы ряда $S_n(x) = \varphi_n(x)$. Поэтому ряд равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится последовательность $\varphi_n(x)$.

Оценим члены ряда. При $k = 1$ $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \le M|x - x_0|$. При $k = 2$ $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))|\, dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|\, dt\right| \le ML\frac{|x-x_0|^2}{2}$.

Применим метод математической индукции. Предположим, что
$|\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)| \le ML^{n-2}\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$. Тогда
$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi_{n-2}(t))|\, dt\right| \le ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$.

Отсюда следует, что $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} \quad (8)$.

Функциональный ряд (7) мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$. Числовой ряд сходится по признаку Даламбера : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{Lh}{n+1} \to 0 < 1$ при $n \to +\infty$. Поэтому функциональный ряд сходится равномерно. •

4. Докажем, что предел последовательности $\varphi_n(x)$ — решение ИУ.

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$. Перейдем к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве $\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt$. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится, то последовательность $f(x, \varphi_n(x))$ тоже равномерно сходится. Тогда $\varphi(x) = y_0 + \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \lim\limits_{n \to +\infty} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_{n-1}(t))\ dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$. Таким образом, $\varphi(x)$ — решение ИУ (3) и $\varphi(x)$ — решение задачи Коши. •

3.2. Единственность решения

5. Докажем вспомогательную лемму об интегральных неравенствах.

Лемма (Гронуола-Беллмана). *Пусть функция* $y(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, $A>0$, $B>0$. *Если* $|y(x)| \le A + B\left|\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|\,dt\right| \quad \forall x, x_0 \in [a,b], \quad (I)$

то $|y(x)| \le Ae^{B|x-x_0|} \quad \forall x, x_0 \in [a,b]. \quad (II)$

Доказательство. Обозначим $N = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$. Пусть для определенности $x > x_0$. Тогда из неравенства (I) следует $|y(x)| \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|\,dt \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} N\,dt = A + BN(x-x_0)$.

Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I) : $|y(x)| \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} [A + BN(t-x_0)]\,dt = A + BA(x-x_0) + B^2N\frac{(x-x_0)^2}{2}$. Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I)... и так далее. На шаге с номером n получим $|y(x)| \le A + BA(x-x_0) + \ldots + B^nA\frac{(x-x_0)^n}{n!} + B^{n+1}N\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. Перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим $|y(x)| \le Ae^{B(x-x_0)}$.

Если $x < x_0$, то $|y(x)| \le Ae^{B(x_0-x)}$. Неравенство (II) доказано. •

6. Докажем, что у задачи Коши может быть только одно решение.

Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(x)$ — решения интегрального уравнения (3). Тогда $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$, $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,dt$.

Рассмотрим разность $\varphi(x) - \psi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} [f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))]\,dt$. Оценим абсолютную величину $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))|\,dt\right| \le$ (условие Липшица) $\le L\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|\,dt\right|$. Применим лемму об интегральных неравенствах и получим $|\varphi(x) - \psi(x)| \le 0$. Следовательно, $\varphi(x) = \psi(x) \;\; \forall x$. •

Замечания. Если функция $f(x,y)$ по y не удовлетворяет условию Липшица, а только непрерывна, то можно доказать существование решения и нельзя доказать его единственность.

Метод доказательства существования решения — это метод последовательных приближений Пикара.

Пример. Задача Коши $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ имеет два решения : $y = x^2/4$ и $y = 0$. Почему два?

3.3. Принцип сжимающих отображений

Множество X — *метрическое пространство*, если каждой паре x, y его элементов поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x,y)$ (*расстояние* или *метрика*) и выполнены три условия:

1) $\rho(x,y) \ge 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z) \;\; \forall x,y,z \in X$.

Последовательность элементов x_n *сходится* к элементу a, если $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Последовательность элементов x_n называется *фундаментальной*, если
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \mid \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall n, m > N$.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится.

Полными метрическими пространствами являются множества вещественных и комплексных чисел, множество n-мерных векторов (с вещественными или с комплексными компонентами), а также $C([a,b])$ — множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(x(t), y(t)) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Элемент $x \in X$ — *неподвижная точка* отображения $A : X \to X$, если $A(x) = x$.

Отображение $A : X \to X$ называется *сжимающим*, если при некотором $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство $\rho(A(x), A(y)) \le \alpha\,\rho(x,y) \;\; \forall x, y \in X$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ — произвольный элемент. Построим последовательность элементов $x_1 = A(x_0),\ x_2 = A(x_1), \dots, x_n = A(x_{n-1}), \dots$

Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Рассмотрим $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(A(x_n), A(x_{n-1})) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le \alpha^n\rho(x_1, x_0)$.

Пусть $m = n + p$. Тогда $\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le (\alpha^{n+p} + \alpha^{n+p-1} + \ldots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) \le \alpha^n\rho(x_1, x_0)(\alpha^p + \ldots + 1) = \alpha^n\rho(x_1, x_0)\frac{1-\alpha^{p+1}}{1-\alpha}$.
Если $n \to +\infty$, то правая часть неравенства стремится к нулю. Таким образом, x_n — фундаментальная и, следовательно, сходящаяся последовательность.

Пусть $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Покажем, что a — неподвижная точка отображения A. В неравенстве $\rho(a, A(a)) \le \rho(a, x_n) + \rho(x_n, A(a)) = \rho(a, x_n) + \rho(A(x_{n-1}), A(a)) \le \rho(a, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, a)$ перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим $\rho(a, A(a)) = 0$. Следовательно, $A(a) = a$.

Покажем, что неподвижная точка может быть только одна. Пусть $a = A(a)$ и $b = A(b)$. Тогда $\rho(a, b) = \rho(A(a), A(b)) \le \alpha\rho(a, b)$. Отсюда $(1-\alpha)\rho(a, b) \le 0$ и $\rho(a, b) = 0$. Поэтому $a = b$. •

Следствие. *При достаточно малых h решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение $y(t) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$. Пусть $C([x_0 - h, x_0 + h])$ — метрическое пространство функций, непрерывных на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Построим отображение: $A\,:\,y(t) \mapsto y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$.

Оценим расстояние $\rho(A(y(x)), A(z(x))) = \max\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \left|\int\limits_{x_0}^{x}[f(t, y(t)) - f(t, z(t))]\,dt\right| \le$

$\le L \max\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \left|\int\limits_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,dt\right| \le L \max\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \left|\int\limits_{x_0}^{x} \rho(y(t), z(t))\,dt\right| \le Lh\rho(y(x), z(x))$.
Если $Lh < 1$, то отображение A — сжимающее. Тогда ИУ имеет единственное решение. •

4. Приближенные и численные методы решения задачи Коши

Пусть на отрезке $[x_0, x_0 + a]$ нужно найти решение задачи Коши $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$. Предположим, что условия теоремы существования и единственности решения выполнены.

Будем называть *приближенным решением* задачи Коши функцию, достаточно близкую к точному решению. Будем обозначать $y(x)$ — точное решение задачи Коши, $\tilde{y}(x)$ — приближенное решение.

На практике обычно выбирают некоторое множество значений независимой переменной $x_j,\ j = 0\,..\,N$ и находят (приближенно!) соответствующие им значения приближенного решения $\overline{y}_j = \tilde{y}(x_j),\ j = 0\,..\,N$. Численным решением задачи Коши будем называть множество пар $(x_j, \overline{y}_j),\ j = 0\,..\,N$.

Если найдено численное решение задачи Коши, то ее приближенное решение может быть построено, например, как интерполяционный полином Лагранжа: $\tilde{y}(x) = \sum\limits_{j=0}^{N} \overline{y}_j \prod\limits_{k=0,\,k\ne j}^{N} \dfrac{x - x_k}{x_j - x_k}$.

Иногда численным решением называют множество коэффициентов разложения приближенного решения по заданной системе функций.

4.1. Метод последовательных приближений

Метод доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши можно использовать при построении алгоритма ее численного решения. Можно взять $\tilde{y}(x) = \varphi_M(x)$, где M — некоторое достаточно большое число.

Алгоритм метода последовательных приближений в общем случае состоит в следующем. Обозначим $\varphi_{m,j} = \varphi_m(x_j)$. Тогда

$\varphi_{0,j} = y_0,\ \ j = 0\,..\,N$ и $\varphi_{n,j} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_j} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,dt,\ \ j = 0\,..\,N,\ \ n = 1, 2, \ldots$.

Для приближенного вычисления интегралов используем квадратурную формулу $\int\limits_{x_0}^{x_{j+1}} f(t)\,dt = \sum\limits_{k=0}^{j} A_k\,f(x_k)$, где A_k — некоторые коэффициенты (не зависящие от функции $f(t)$). Если используется формула левых прямоугольников, то $A_k = \{x_k - x_{k-1},\ \ k \neq j;\ \ 0,\ \ k = j\}$. Тогда

$\varphi_{n,j} = y_0 + \sum\limits_{k=0}^{j} A_k f(x_k, \varphi_{n-1,k}),\ \ j = 0\,..\,N,\ \ n = 1\,..\,M.$

В частном случае, когда $x_k - x_{k-1} = h$ (равноотстоящие узлы) и используется формула левых прямоугольников для приближенного вычисления интеграла,

$\varphi_{0,j} = y_0$ и $\varphi_{n,j} = y_0 + h\sum\limits_{k=0}^{j-1} f(x_k, \varphi_{n-1,k}),\ \ j = 0\,..\,N,\ \ n = 0\,..\,M.$

4.2. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутта

При численном решении задачи Коши $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ лучше использовать алгоритм *метода Эйлера.*

Выберем на отрезке $[x_0, x_0 + a]$ узлы $x_j,\ \ j = 0\,..\,N$. Будем искать значения приближенного решения $\overline{y}_j = \tilde{y}(x_j),\ \ j = 0\,..\,N$ следующим образом:

1) $\overline{y}_0 = y_0$;

2) $\overline{y}_{j+1} = \overline{y}_j + f(x_j, \overline{y}_j)\,(x_{j+1} - x_j),\ \ j = 0\,..\,N-1.$

Этот алгоритм основан на следующей простой идее. Равенство $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$ заменяется на приближенное равенство $\dfrac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = f(x_j, y(x_j)).$

Геометрический смысл метода: через каждую точку с координатами $(x_j, \overline{y}_j)$ проводится касательная к графику интегральной кривой до пересечения с вертикалью $x = x_{j+1}$.

Ломаная, соединяющая точки $(x_j, \overline{y}_j)$, называется ломаной Эйлера. Эта ломаная — график приближенного решения, полученного из численного решения кусочно-линейной интерполяцией.

Метод Эйлера можно улучшить (*метод Эйлера с выравниванием*) :

1) $\overline{y}_0 = y_0$;

2) $m_1 = f(x_j, \overline{y}_j),\quad m_2 = f(x_{j+1}, \overline{y}_j + m_1(x_{j+1} - x_j)),\quad \overline{y}_{j+1} = \overline{y}_j + \frac{m_1 + m_2}{2}\,(x_{j+1} - x_j),\ \ j = 0\,..\,N-1.$

Алгоритм *метода Рунге-Кутта* немного сложнее, но существенно точнее. Для равноотстоящих узлов

1) $\overline{y}_0 = y_0$;

2) $m_1 = f(x_j, \overline{y}_j),\ m_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, \overline{y}_j + \frac{h}{2}m_1),\ m_3 = f(x_j + \frac{h}{2}, \overline{y}_j + \frac{h}{2}m_2),\ m_4 = f(x_j + h, \overline{y}_j + hm_3),$
$\overline{y}_{j+1} = \overline{y}_j + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}\,h,\ j = 0\,..\,N-1.$

Пример. $y' = y,\ \ y(0) = 1,\ \ [0, 1],\ \ h = 0.2.$

4.3. Погрешность метода Эйлера

Пусть $y(x)$ — точное решение задачи Коши $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ на отрезке $[x_0, x_0 + a]$. Пусть $(x_j, \overline{y}_j),\ \ j = 0\,..\,N$ — ее численное решение, полученное методом Эйлера. Построим приближенное решение с помощью кусочно-линейной интерполяции: $\tilde{y}(x) = \overline{y}_j + \frac{\overline{y}_{j+1} - \overline{y}_j}{x_{j+1} - x_j}\,(x - x_j),\ \ x \in [x_j, x_{j+1}].$

Обозначим $\delta(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ *погрешность метода Эйлера.* Пусть $h = \max\limits_{j=0\,..\,N-1}(x_{j+1} - x_j).$

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по x и по y, то $|\delta(x)| \leq O(h)$.*

Доказательство. Вычислим производную погрешности при $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$\delta'(x) = y'(x) - \tilde{y}'(x) = f(x, y(x)) - f(x_j, \overline{y}_j) =$ (вычитаем и добавляем)

$= f(x, y(x)) - f(x_j, y(x)) + f(x_j, y(x)) - f(x_j, \tilde{y}(x)) + f(x_j, \tilde{y}(x)) - f(x_j, \overline{y}_j).$

Тогда $|\delta'(x)| \leq L\,|x - x_j| + L\,|y(x) - \tilde{y}(x)| + L\,|\tilde{y}(x) - \overline{y}_j|.$

Обозначим $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$ (так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то такое M существует).

Очевидно, что $\delta(x) \leq \int\limits_{x_0}^{x} \delta'(t)\,dt + \delta(x_0)$, причем $\delta(x_0) = 0$. Поэтому $|\delta(x)| \leq L(M+1)ha + L\int\limits_{x_0}^{x} |\delta(t)|\,dt.$

Применим лемму об интегральных неравенствах : $|\delta(x)| \leq L(m + 1)hae^{La} = \mathrm{const} \cdot h = O(h).$ •

Замечания. Реальная погрешность численного метода всегда меньше теоретической. Из теоремы следует, что $|\delta(x)| \to 0$ при $h \to 0$, т. е. решение задачи Коши существует и единственно.

5. Зависимость решения задачи Коши от исходных данных

В задаче Коши $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ исходными данными являются функция $f(x, y)$ и число y_0. Вопрос : если взять задачи Коши с близкими исходными данными, то насколько близкими будут их решения?

Рассмотрим задачу Коши для ДУ с правой частью, зависящей от параметра μ : $y' = f(x, y, \mu)$, $y(x_0) = y_0$, причем пусть $|\mu - \mu_0| \le c$. Решение этой задачи обозначим $y(x, \mu)$. Исследуем характер зависимости $y(x, \mu)$ от μ.

Обозначим $\Pi = \{(x, y, \mu) \mid |x - x_0| \le a, \;\; |y - y_0| \le b, \;\; |\mu - \mu_0| \le c\}$.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y, \mu)$ определена и непрерывна в параллелепипеде Π и удовлетворяет условию Липшица по y, то решение задачи Коши непрерывно зависит от μ.*

Доказательство. При перечисленных условиях решение задачи Коши существует и единственно.

Обозначим $\Delta y = y(x, \mu + \Delta\mu) - y(x, \mu)$ (здесь и далее указываются не все аргументы рассматриваемых величин). Нужно доказать, что
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\mid\; |\Delta y| < \varepsilon \;\; \forall \Delta\mu, \;\; \Delta\mu < \delta, \;\; \forall x.$

Функции $y(x, \mu)$ и $y(x, \mu + \Delta\mu)$ — решения задачи Коши. Поэтому выполняются равенства $y'(x, \mu) = f(x, y(x, \mu), \mu), \quad y(x_0, \mu) = y_0$ и $y'(x, \mu+\Delta\mu) = f(x, y(x, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu), \quad y(x_0, \mu+\Delta\mu) = y_0$.

Тогда производная Δy по переменной x
$(\Delta y)'_x = f(x, y(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, y(x, \mu), \mu) =$ (вычитаем и добавляем)
$= f(x, y(x, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(x, y(x, \mu+\Delta\mu), \mu) + f(x, y(x, \mu+\Delta\mu), \mu) - f(x, y(x, \mu), \mu)$. Следовательно $|(\Delta y)'| \le |f(x, y(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, y(x, \mu 0, \mu + \Delta\mu)| + |f(x, y(x, \mu + \Delta\mu), \mu) - f(x, y(x, \mu), \mu)| = \{1\} + \{2\}$.

В силу условия Липшица $\{1\} \le L|y(x, \mu + \Delta\mu) - y(x, \mu)|$.
Так как функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна, то $\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\mid\; |\{2\}| < \varepsilon_1 \;\; \forall \Delta\mu, \;\; |\Delta\mu| < \delta_1$.
Поэтому $|(\Delta y)'| \le L|\Delta y| + \varepsilon_1$ при $|\Delta\mu| < \delta_1$.

Очевидно, что $\Delta y(x_0) = 0$ и $\Delta y = \int\limits_{x_0}^{x} (\Delta y)'(t)\, dt$. Отсюда $|\Delta y| \le L \int\limits_{x_0}^{x} |(\Delta y)'| dt + \varepsilon_1 a$.
Применим лемму об интегральных неравенствах и получим $|\Delta y| \le \varepsilon_1 a e^{La}$.

Выберем ε_1 так, чтобы $\varepsilon_1 a e^{La} < \varepsilon$. Тогда $\delta = \delta_1$. •

Следствие. *Решение задачи Коши непрерывно зависит от значения y_0.*

Доказательство. Введем новую искомую функцию $\tilde{y} = y - y_0$. Эта функция является решением задачи Коши $\tilde{y}' = f(x, \tilde{y} + y_0) = f_1(x, \tilde{y}, y_0), \quad \tilde{y}(x_0) = 0$. Применим теорему 1, считая, что $\mu = y_0$. •

Теорема 2. *Если функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна в Π и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \mu}$, то решение задачи Коши дифференцируемо по параметру μ в интервале $(\mu_0 - c, \mu_0 + c)$.*

Доказательство. Пусть, как и раньше, $\Delta y = y(x, \mu + \Delta\mu) - y(x, \mu)$.
Нужно доказать, что существует $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}$.

Предположим, что решение задачи Коши $y(x, \mu)$ дифференцируемо по μ. Равенства $y'(x, \mu) = f(x, y(x, \mu), \mu), \quad y(x_0, \mu) = y_0$ дифференцируем по μ:
$$\left(\frac{dy}{d\mu}\right)'(x, \mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \mu)\, \frac{dy}{d\mu}(x, \mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, y, \mu), \qquad \frac{dy}{d\mu}(x_0, \mu) = 0.$$

Пусть $u(x, \mu)$ — решение задачи Коши $u'(x, \mu) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, \mu)\, u(x, \mu) + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x, y, \mu), \quad u(x_0, \mu) = 0$ (это уравнение — линейное, его решение находится в квадратурах).

Докажем, что $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta\mu} = u(x, \mu)$. Обозначим $v(x, \mu, \Delta\mu) = \dfrac{\Delta y}{\Delta\mu} - u(x, \mu)$.

Дальнейшие действия такие же, как и раньше (только формулы сложнее). По построению $v(x_0) = 0$. Поэтому $v(x) = \int\limits_{x_0}^{x} v'(t)\, dt$. Вычислим производную функции v и оценим ее абсолютную величину. Ясно, что $v'(x, \mu, \Delta\mu) = \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}\right)' - u'(x, \mu)$. Здесь
$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu}\right)' = \frac{1}{\Delta\mu}\big[f(x, y(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) \mp f(x, y(x, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, y(x, \mu), \mu)\big] =$$

(формула конечных приращений Лагранжа)
$= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,\mu) + \theta_1 \Delta y, \mu + \Delta\mu)\, \dfrac{\Delta y}{\Delta \mu} + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x, y(x,\mu), \mu + \theta_2 \Delta\mu)$

и так далее ... :-(?•

6. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Исследуем ДУ 1-го порядка общего вида $F(x, y, y') = 0$.

6.1. Условия существования и единственности решения

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно производной y', то получится одно или больше уравнений вида $y' = f_j(x, y), \quad j = 1, 2, \ldots$ Зададим условие Коши $y(x_0) = y_0$. Предположим, что условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполнены. Тогда у задачи Коши решений столько, сколько получилось разрешенных относительно производной уравнений.

Если интегральные кривые, проходящие через точку (x_0, y_0), имеют разные касательные, то, чтобы выделить единственное решение задачи Коши, можно задать дополнительное условие $y'(x_0) = y_1$. Число y_1 нельзя задавать произвольно, оно должно быть корнем уравнения $F(x_0, y_0, y_1) = 0$.

Пример 1. $y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$.

Теорема. *Пусть (x_0, y_0, y_1) — такие числа, что $F(x_0, y_0, y_1) = 0$. Если*
1) функция $F(x, y, y')$ и ее частные производные непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0, y_1);
2) $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_1) \neq 0$,
то в окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1$.

Доказательство. По теореме о неявной функции в окрестности точки (x_0, y_0, y_1) существует единственная функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условиям $F(x, y, f(x, y)) = 0$ и $f(x_0, y_0) = y_1$. Эта функция непрерывна и дифференцируема, ее производная по y находится как производная неявной функции. Следовательно, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y. Тогда существует единственное решение задачи Коши $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$, которое по построению такое, что $y'(x_0) = y_1$. •

6.2. Метод введения параметра (метод предварительного дифференцирования)

Уравнения вида $F(x, y') = 0$ и $F(y, y') = 0$ называются *неполными.*

Начнем с уравнения $F(x, y') = 0$. Если уравнение можно разрешить относительно $x : \; x = f(y')$, то обозначим $p = y'$ и будем рассматривать p как параметр. Так как $x = f(p)$, то $dx = f'(p)\, dp$. Но, с другой стороны, $dx = \dfrac{dy}{p}$. Отсюда $y = \int p f'(p)\, dp + C$. Решение неполного уравнения найдено в параметрической форме (и в квадратурах).

Уравнение $F(x, y') = 0$ допускает параметризацию, если найдутся такие функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \;\; \forall t$. Тогда $x = \varphi(t), \; y' = \psi(t)$ и $dy = y'\, dx = \psi(t)\varphi'(t)\, dt$. Тогда $y = \int \psi(t)\varphi'(t)\, dt + C$. В этом случае решение также найдено в параметрической форме.

Второе уравнение рассматривается точно так же.

Пример 2. $y = y'^2 e^{y'}$.

Пример 3. $y^{\frac{2}{5}} + (y')^{\frac{2}{5}} = 1$.

Уравнение вида $x\alpha(y') + y\beta(y') = \gamma(y')$ называют *уравнением Лагранжа.*

Обозначим $p = y'$ и будем считать, что p — параметр. Предположим, что $\beta(y') \neq 0$. Тогда поделим уравнение на $\beta(y')$ и перепишем его так : $y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Тогда $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ и $dy = \varphi(p)\, dx + x\varphi'(p)\, dp + \psi'(p)\, dp = p\, dx$. Получили линейное уравнение $[\varphi(p) - p]\, \dfrac{dx}{dp} + x\varphi'(p) = -\psi'(p)$ относительно функции $x = x(p)$, решение которого можно найти в квадратурах. Аналогично поступают, если $\alpha(y') \neq 0$.

Уравнение $y = xy' + \psi(y')$ называют *уравнением Клеро* (частный случай уравнения Лагранжа). В этом случае рассуждения более простые. Действительно, $dy = x\, dp + p\, dx + \psi'(p)\, dp = p\, dx$. Следовательно, $[x + \psi'(p)]\, dp = 0$. Если $dp = 0$, то получим общее решение уравнения Клеро $y =$

$xC + \psi(C)$. Если же $x + \psi'(p) = 0$, то получим его особое решение. График особого решения — огибающая семейства прямых, которое дает общее решение.

Доказано, что у уравнения Клеро особое решение есть всегда.

Пример 4. $y = xy' + y' - y'^2$.

Методом предварительного дифференцирования можно доказать, что ДУ $F(x, y, y') = 0$ всегда можно привести к уравнению, разрешенному относительно производной (но, возможно, решить его в квадратурах все равно не получится). Идея следующая. Уравнение $F(x, y, y') = 0$ описывает некоторую поверхность в пространстве переменных x, y, y'. Пусть ее уравнения в параметрической форме $x = \varphi(u, v),\ \ y = \chi(u, v),\ \ y' = \psi(u, v)$. Из $dy = y'\,dx$ следует, что $\frac{\partial \chi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \chi}{\partial v}\,dv = \psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv\right)$. Получили уравнение в дифференциалах, связывающее переменные u и v.

6.3. Особые решения

Особое решение ДУ — это такое решение, что через каждую точку его графика проходит график другого решения уравнения, причем эти линии имеют в точке пересечения общую касательную.

Теорема 1. *Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ имеет особое решение, то оно удовлетворяет системе уравнений $F(x, y, y') = 0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$.*

Доказательство. Предположим, что функция F имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial F}{\partial y'}$. Если $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, то по теореме из п.6.1 задача Коши может иметь только одно решение (при дополнительном условии $y'(x_0) = y_1$). Но тогда особых решений не существует. •

Замечание. Условия теоремы являются необходимыми, но не достаточными.

Пример 5. $y^2(1 + y'^2) = 1$.

Теорема 2. *Если уравнение имеет особое решение и его общее решение имеет вид $\Phi(x, y, c) = 0$, то особое решение удовлетворяет системе уравнений $\Phi(x, y, c) = 0,\ \ \frac{\partial \Phi}{\partial c}(x, y, c) = 0$.*

Доказательство. Через каждую точку графика особого решения проходит график некоторого частного решения из общего решения, поэтому каждой точке графика особого решения соответствует некоторое значение произвольной постоянной c, и особое решение можно представить в параметрической форме $x = \varphi(c),\ \ y = \psi(c)$.

Так как каждая точка особого решения является и точкой частного решения, то выполняется равенство $\Phi(\varphi(c), \psi(c), c) = 0$. Продифференцируем это равенство по c : $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\varphi(c), \psi(c), c)\varphi'(c) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\varphi(c), \psi(c), c)\psi'(c) + \frac{\partial \Phi}{\partial c}(\varphi(c), \psi(c), c) = 0$ (предполагаем, что функция Φ дифференцируема).

Теперь запишем условие совпадения касательных к графикам решений в точке пересечения : $\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\varphi(c), \psi(c), c)}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\varphi(c), \psi(c), c)}$. Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\varphi(c), \psi(c), c)\varphi'(c) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\varphi(c), \psi(c), c)\psi'(c) = 0$.

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial c}(\varphi(c), \psi(c), c) = 0$. •

Замечание. Условия теоремы являются необходимыми, но не достаточными.

Пример 5. $y^2(1 + y'^2) = 1$.

7. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальной системой линейных ДУ 1-порядка называется система уравнений вида
$y'_j = a_{j1}(x)y_1 + \ldots + a_{jn}(x)y_n + f_j(x),\ \ j = 1\ ..\ n$,
где $y_1(x), \ldots y_n(x)$ — искомые функции, $a_{jk}(x)$ — коэффициенты системы, $f_j(x)$ — правые части.

7.1. Свойства решений нормальных систем

В векторно-матричной форме нормальная система имеет вид

$y' = A(x)y' + f(x) \quad (1)$,
где $y = y(x)$ — искомая вектор-функция, $F(x)$ — функциональная матрица коэффициентов, $f(x)$ — вектор-функция правых частей. Систему ДУ (1) называют *неоднородной*, а
$y' = A(x)y' \quad (2)$
— соответствующей ей *однородной* системой.

I. *Линейная комбинация решений системы (2) является решением системы (2).*

II. *Разность решений системы (1) является решением системы (2).*

III. *Сумма решений системы (1) и системы (2) является решением системы (1).*

IV. *Если y^1 и y^2 — решения системы (1) с правыми частями f^1 и f^2, то $y^1 + y^2$ — решение системы (1) с правой частью $f^1 + f^2$.*

V. *Если матрица $A(x)$ и вектор-функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то любое решение системы (1) удовлетворяет неравенству*

$$|y(x)| \leq \left(|y(x_0)| + (b-a)\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\right) e^{|x-x_0|\max\limits_{x\in[a,b]}||A(x)||} \quad \forall x, x_0 \in [a, b].$$

Здесь использованы следующие понятия: длина вектора $|\cdot|$ и норма матрицы $||\cdot||$.

VI. *Если матрица $A(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, то система (1) может иметь только одно решение, удовлетворяющее условию Коши $y(x_0) = y_0$.*

VII. *Решение системы (2) с непрерывной матрицей коэффициентов тождественно равно нулю, если оно равно нулю хотя бы в одной точке.*

7.2. Фундаментальная система решений

Вектор-функции $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ называются *линейно независимыми* на $[a, b]$, если $\forall x \in [a, b]$ линейно независимы векторы $y^1(x), \ldots, y^n(x)$. Аналогично, вектор-функции $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ называются *линейно зависимыми* на $[a, b]$, если $\forall x \in [a, b]$ линейно зависимы векторы $y^1(x), \ldots, y^n(x)$. (Возможна ситуация, что на некотором отрезке система вектор-функции и не зависима, и не независима.)

Пусть $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ — вектор-функции с компонентами $y^1_j(x), \ldots, y^n_j(x), \quad j = 1\,..\,n$. Определитель $W(x) = \begin{vmatrix} y^1_1(x) & \ldots & y^n_1(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y^1_n(x) & \ldots & y^n_n(x) \end{vmatrix}$ называется *определителем Вронского.*

Теорема 1. *Вектор-функции $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ линейно независимы на отрезке тогда и только тогда, когда их определитель Вронского не равен нулю во всех точках отрезка.*

Доказательство. Если при некотором x векторы $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ линейно независимы, то система уравнений $c_1y^1_1(x) + \ldots + c_ny^n_1(x) = 0, \ \ldots \ c_1y^1_n(x) + \ldots + c_ny^n_n(x) = 0$ имеет только нулевое решение $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, и наоборот. Тогда определитель этой системы не равен нулю, а этот определитель — определитель Вронского. •

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной нормальной системы ДУ называют n ее линейно независимых решений.

Теорема 2. *Система решений $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ системы ДУ (2) фундаментальна на отрезке, если хотя бы в одной точке x_0 этого отрезка линейно независимы векторы $y^1(x_0), \ldots, y^n(x_0)$.*

Доказательство. Предположим, что найдется такое $x_1 \in [a, b]$, что векторы $y^1(x_1), \ldots, y^n(x_1)$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, что $c_1y^1(x_1) + \ldots + c_ny^n(x_1) = 0$. Рассмотрим вектор-функцию $y(x) = c_1y^1(x) + \ldots + c_ny^n(x)$ — решение системы (2). Так как $y(x_1) = 0$, то $y(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$. Следовательно, $y(x_0) = 0$, что противоречит условию теоремы. •

Следствие. *Система решений $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ системы ДУ (2) фундаментальна на отрезке, если хотя бы в одной точке x_0 этого отрезка определитель Вронского не равен нулю.*

Пример 1. $y'_1 = y_2, \ \ y'_2 = y_1$.

Теорема 3. *Если $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ — ФСР системы (2), то общее решение системы (2) имеет вид $y(x) = c_1y^1(x) + \ldots + c_ny^n(x) \quad (3)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.*

Доказательство. Ясно, что при любых $c_1, \ldots, c_n$ формула (3) дает решение системы (2). Покажем, что любое решение $y(x)$ системы (2) можно представить в виде (3).

Пусть x_0 — какая-то точка отрезка $[a,b]$. Вектор $y(x_0)$ можно разложить по линейно независимым векторам $y^1(x_0),\ldots,y^n(x_0)$: $y(x_0)=c_1y^1(x_0)+\ldots+c_ny^n(x_0)$. Тогда $y(x)$ и $c_1y^1(x)+\ldots+c_ny^n(x)$ — два решения системы (2), принимающие одно и то же значение в точке x_0. Поэтому они равны. •

Следствие. *Если $y^1(x),\ldots,y^n(x)$ — ФСР системы (2) и $y^0(x)$ — частное решение системы (1), то общее решение системы (1) имеет вид $y(x)=c_1y^1(x)+\ldots+c_ny^n(x)+y^0(x) \quad (4)$.*

Пример 2. $y_1'=y_2+1,\;\; y_2'=y_1-x$.

7.3. Метод вариации произвольных постоянных

Теорема. *Пусть на отрезке $[a,b]$ матрица $A(x)$ и вектор $f(x)$ непрерывны. Если известна ФСР однородной системы (2), то решение системы (1) может быть найдено в квадратурах.*

Доказательство. Пусть $y^1(x),\ldots,y^n(x)$ — ФСР системы (2). Составим из этих векторов как из столбцов матрицу $Y(x)$, она является решением уравнения $Y'(x)=A(x)Y(x)$ (и называется фундаментальной матрицей). Общее решение системы (2) можно записать в виде $y=Y(x)\cdot c$, где c — произвольный постоянный вектор. Будем искать решение системы (1) в виде $y=Y(x)\cdot c(x)$, где $c(x)$ — новая искомая вектор-функция. Подставим это выражение в систему (1) и получим $Y(x)c'(x)=f(x)$. Отсюда $c(x)=\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)f(t)\,dt+C$, где C — произвольный постоянный вектор. •

Пример. $y_1'=y_2+1,\;\; y_2'=y_1-x$.

На практике удобно искать производные компонент вектор-функции $c(x)$ из системы уравнений
$y_1^1(x)c_1'(x)+\ldots+y_1^n(x)c_n'(x)=f_1(x)$,
$\ldots$
$y_n^1(x)c_1'(x)+\ldots+y_n^n(x)c_n'(x)=f_n(x)$.

8. Линейные дифференциальные уравнения порядка n

Линейным уравнением порядка n называется уравнение вида
$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=g(x)$.

8.1. Свойства решений линейных уравнений

Обозначим $L[y]$ левую часть линейного уравнения порядка n. Это выражение называют *линейным дифференциальным оператором* порядка n. Тогда уравнения $L[y]=g(x) \quad (1)$ и $L[y]=0 \quad (2)$ — неоднородное и однородное линейные уравнения порядка n соответственно.

Есть два способа построения теории линейных уравнений: или все делать точно так же, как и в случае линейных систем, или воспользоваться тем, что линейное уравнение порядка n эквивалентно системе ДУ 1-го порядка из n уравнений. Чтобы убедиться в этом, нужно ввести новые искомые функции $z_1=y,\;\; z_2=y',\;\; \ldots z_n=y^{(n-1)}$. Тогда получим систему ДУ 1-го порядка
$z_1'=z_2,\;\; z_{n-1}'=z_n,\;\; z_n'=-a_n(x)z_1-a_{n-1}(x)z_2-\ldots-a_1(x)z_n+g(x) \quad (3)$.
У такой системы уравнений матрица коэффициентов имеет ненулевые последнюю строку и одну диагональ (над главной диагональю), а у вектора правых частей только один элемент ненулевой.

Свойства решений линейных уравнений почти такие же, что и у нормальных систем 1-го порядка.

I. *Линейная комбинация решений уравнения (2) является решением уравнения (2).*

II. *Разность решений уравнения (1) является решением уравнения (2).*

III. *Сумма решений уравнения (1) и уравнения (2) является решением уравнения (1).*

IV. *Если y_1 и y_2 — решения уравнения (1) с правыми частями g_1 и g_2, то y_1+y_2 — решение уравнения (1) с правой частью g_1+g_2.*

V. *Если коэффициенты и правая часть уравнения (1) непрерывны на отрезке $[a,b]$, то любое решение уравнения (1) удовлетворяет неравенству*
$|y(x)|\le\ldots \quad \forall x,x_0\in[a,b]$.

Предлагаю читателю самостоятельно получить это неравенство. Впрочем, без него в дальнейшем все равно можно обойтись :-).

VI. *Если коэффициенты уравнения непрерывны на отрезке $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$, то уравнение (1) может иметь только одно решение, удовлетворяющее условию Коши ...*

А как ставится условие Коши? :-)

VII. *Решение уравнения (2) с непрерывными коэффициентами тождественно равно нулю, если оно равно нулю хотя бы в одной точке.*

А это не верно! Должно быть как-то по-другому :-)

8.2. Фундаментальная система решений

Все определения и теоремы полностью аналогичны тем, которые были приведены для нормальных систем линейных ДУ.

Функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* на $[a,b]$, если $\forall x \in [a,b]$ линейно независимы векторы $\left(y_j(x),\, y_j'(x),\, \ldots,\, y_j^{(n-1)}(x)\right)$, $\; j = 1 \,..\, n$.

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородного линейного уравнения порядка n называют n его линейно независимых решений.

Определитель Вронского для системы решений линейного уравнения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы на отрезке тогда и только тогда, когда их определитель Вронского не равен нулю во всех точках отрезка.*

Теорема 2. *Система решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (2) фундаментальна на отрезке, если хотя бы в одной точке x_0 этого отрезка их определитель Вронского не равен нулю.*

Пример 1. $y'' + y = 0$.

Теорема 3. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ФСР уравнения (2), то общее решение уравнения (2) имеет вид $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.*

Следствие. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ФСР уравнения (2) и $y_0(x)$ — частное решение уравнения (1), то общее решение уравнения (1) имеет вид $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_0(x)$.*

Пример 2. $y'' + y = e^x$.

8.3. Метод вариации произвольных постоянных

Теорема. *Пусть на отрезке $[a,b]$ коэффициенты и правая часть уравнения (1) непрерывны. Если известна ФСР однородного уравнения (2), то решение уравнения (1) может быть найдено в квадратурах.*

Доказательство. Можно воспользоваться эквивалентностью линейного уравнения и нормальной системы, а можно сразу искать решение неоднородного уравнения в виде $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$, где $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ — новые искомые функции. Для определения этих функций получится система уравнений, только в последнем из них правая часть не равна нулю :

$c_1'(x)y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0,$

$\ldots$

$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x).$ •

9. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *линейные уравнения с постоянными коэффициентами* — однородное $L[y] = 0$ и неоднородное $L[y] = f(x)$, где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

9.1. Однородные уравнения (метод Эйлера)

Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами может быть построена следующим образом.

Обозначим $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *характеристический полином.*

Лемма 1. $L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\, P(\lambda)$.

Доказательство. Подставим выражение $e^{\lambda x}$ в $L[y]$. •

Следствие. *Функция $e^{\lambda x}$ является решением однородного уравнения $L[y]=0$ тогда и только тогда, когда число λ является корнем характеристического полинома.*

Будем считать, что коэффициенты ДУ — вещественные числа, при этом корни характеристического полинома могут быть и вещественными, и комплексными.

Теорема 1. *Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — простые вещественные корни характеристического полинома, то $e^{\lambda_1 x}\ldots,e^{\lambda_n x}$ — ФСР линейного однородного уравнения.*

Доказательство. Из следствия следует, что все эти функции являются решениями однородного уравнения. Докажем, что они линейно независимы. Вычислим определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x}\end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)$$

(определитель Вандермонда). •

Пример 1. $y'''-5y''+6y'=0$.

Теорема 2. *Если $\alpha\pm i\beta$ — простые комплексные корни характеристического полинома, то в ФСР содержатся функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.*

Доказательство. Лемма 1 и следствие верны также и в случае комплексных корней. Указанные функции, следовательно, являются решениями однородного уравнения.

Докажем, что они независимы. Предположим, что все остальные корни характеристического полинома — вещественные и простые. Запишем определитель Вронского и выполним следующие действия :

к первому столбцу добавим второй столбец, умноженный на i;

второй столбец умножим на $-2i$;

ко второму столбцу добавим первый столбец.

Получим такой же определитель, что и при доказательстве теоремы 1, только $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$. •

Пример 2. $y''+y=0$.

Если полином $P(\lambda)$ имеет корень λ_1 кратности s_1, то $P(\lambda_1)=0$, $P'(\lambda_1)=0$, $\ldots$ $P^{(s_1-1)}(\lambda_1)=0$, но $P^{(s_1)}(\lambda_1)\neq 0$.

Лемма 2. $L[x^m e^{\lambda x}]=\sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j\,P^{(j)}(\lambda)\,x^{m-j}\,e^{\lambda x}$.

Доказательство. Запишем тождество из леммы 1. Продифференцируем его m раз по λ. •

Теорема 3. *Если λ_1 — корень характеристического полинома кратности s_1, то в ФСР однородного уравнения содержатся функции $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$, $x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что эти функции будут решениями уравнения. Покажем их линейную независимость. Вычислим определитель Вронского $W(x)$ в точке 0 :

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \lambda_1 & 2 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{s_1-1} & \lambda_1^{s_1-2} & \ldots & \lambda_1 & (s_1-1)!\end{vmatrix}\neq 0.\quad\bullet$$

Пример 3. $y''''-2y'''+y''=0$.

Следствие. *Если $\alpha\pm i\beta$ — корни характеристического полинома кратности s, то в ФСР содержатся функции $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.*

Доказательство основано на том, что действительная и мнимая части комплексного решения линейного однородного уравнения также являются его решениями. •

Пример 4. $y''''+8y''+16y=0$.

9.2. Неоднородные уравнения (метод неопределенных коэффициентов)

В некоторых случаях частные решения неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

Теорема 1. *Если $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, где α — некоторое число и $P_n(x)$ — полином степени n, то неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет частное решение вида $y = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — полином степени n и s — целое число. Если α — корень характеристического полинома, то s — его кратность; иначе $s = 0$.*

Доказательство. Пусть $P_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$. Покажем, как можно найти коэффициенты полинома $Q_n(x) = q_0x^n + q_1x^{n-1} \ldots + q_{n-1}x + q_n$.

Рассмотрим случай $s = 0$. Подставим выражение для частного решения в уравнение. Получим
$L[e^{\alpha x}(q_0x^n + q_1x^{n-1} \ldots + q_{n-1}x + q_n] =$
$= q_0L[e^{\alpha x}x^n] + q_1L[e^{\alpha x}x^{n-1}] + \ldots + q_{n-1}L[e^{\alpha x}x] + q_nL[e^{\alpha x}] =$ (тождество из леммы 2)
$= q_0 \sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j P^{(j)}(\alpha)x^{n-j}e^{\alpha x} + q_1 \sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j P^{(j)}(\alpha)x^{n-1-j}e^{\alpha x} + \ldots + q_{n-1}(P(\alpha)x + P'(\alpha))e^{\alpha x} + q_nP(\alpha).$
Это выражение должно быть равно $e^{\alpha x}(p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_0)$.

Поделим обе части равенства на $e^{\alpha x}$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях. Тогда
при x^n : $q_0P(\alpha) = p_0$,
при x^{n-1} : $q_0P'(\alpha) + q_1P(\alpha) = p_1$
...
Если $P(\alpha) \neq 0$, то находим q_0 из первого уравнения, q_1 из второго уравнения и так далее. Из последнего уравнения найдем q_n.

Если $s \neq 0$, то все рассуждения такие же. •

Пример 1. $y'' - 5y' + 6y = 6e^x$.

Теорема 2. *Если правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}[P_{1,n}(x)\cos\beta x + P_{2,n}(x)\sin\beta x]$, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y = x^s e^{\alpha x}[Q_{1,n}(x)\cos\beta x + Q_{2,n}\sin\beta x]$, где целое число s — кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического полинома.*

Доказательство можно провести по той же схеме. •

Пример 2. $y'' + 9y = x\cos 3x$.

10. Нормальные системы с постоянными коэффициентами

Для решения нормальных систем линейных ДУ вида (в векторно-матричной форме) $y' = A\,y$ с постоянными коэффициентами можно использовать разные методы и приемы.

10.1. Метод Эйлера

Лемма. *Вектор-функция $y = e^{\lambda x}h$ является решением системы ДУ $y' = A\,y$ тогда и только тогда, когда число λ — собственное значение матрицы A, а вектор h — соответствующий этому числу собственный вектор.*

Доказательство. Подставим $y = e^{\lambda x}h$ в систему уравнений и получим $A\,h = \lambda\,h$. •

В дальнейшем предполагается, что A — вещественная матрица размером $n \times n$. Но в качестве возможных решений системы ДУ будем рассматривать в общем случае комплекснозначные функции.

Теорема 1. *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — простые собственные значения матрицы A и $h^1, \ldots, h^n$ — соответствующие им собственные векторы, то вектор-функции $e^{\lambda_1 x}h^1, \ldots, e^{\lambda_n x}h^n$ образуют фундаментальную систему решений системы ДУ $y' = A\,y$.*

Доказательство. По лемме 1 все перечисленные вектор-функции являются решениями системы ДУ. Рассмотрим определитель Вронского в точке $x = 0$. Его столбцы — векторы $h^1, \ldots, h^n$. Они линейно независимы, так как являются собственными векторами различных собственных значений. Поэтому определитель Вронского не равен нулю. •

Пример 1. $y_1' = 2y_1 + y_2, \;\; y_2' = 3y_1 + 4y_2$.
Пример 2. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \;\; y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \;\; y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3$. (с. з. 2, 3, 6).

Следствие. *Если среди простых собственных значений матрицы A есть два комплексно сопряженных $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то в ФСР содержатся две вектор-функции вида* $e^{\alpha x}\sin\beta x \cdot g^1 + e^{\alpha x}\cos\beta x \cdot g^2$, *где* g^1, g^2 *— некоторые постоянные векторы.*

Доказательство. Комплексно сопряженным собственным значениям $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ соответствуют комплексно сопряженные собственные векторы $h^1 \pm ih^2$. Решениями линейной однородной системы ДУ будут вещественные и мнимые части комплекснозначных вектор-функций $e^{(\alpha\pm i\beta)x}(h^1 \pm ih^2)$. •

Пример 3. $y_1' = 2y_1 - y_2, \ \ y_2' = y_1 + 2y_2$.

Теорема 2. *Пусть λ — собственное значение матрицы A кратности s, $h^1, h^2, \ldots, h^s$ — собственный вектор и присоединенные векторы, соответствующие этому собственному значению. Тогда в ФСР линейной однородной системы ДУ с матрицей коэффициентов A содержатся вектор-функции*

$$y^1 = e^{\lambda x}h^1, \quad y^2 = e^{\lambda x}(h^2 + x\,h^1), \quad \ldots \quad y^s = e^{\lambda x}\Big(h^s + x\,h^{s-1} + \ldots + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}\,h^1\Big).$$

Доказательство. По определению собственного вектора и присоединенных векторов
$Ah^1 = \lambda h^1, \ \ Ah^2 = \lambda h^2 + h^1, \ \ \ldots, \ \ Ah^s = \lambda h^s + h^{s-1}$.
Тогда $(y^k)' = e^{\lambda x}\lambda\Big(h^k + x\,h^{k-1} + \ldots + \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,h^1\Big) + e^{\lambda x}\Big(h^{k-1} + x\,h^{k-2} + \ldots + \dfrac{x^{k-2}}{(k-2)!}\,h^1\Big) = Ay^k$.
Легко видеть, что решения $y^1, \ldots, y^s$ линейно независимы, $W(0) \neq 0$. •

Следствие. *Если λ — собственное значение матрицы A кратности s, то ему соответствует слагаемое вида $y = e^{\lambda x}P_{s-1}(x)$ в общем решении, где $P_{s-1}(x)$ — вектор-функция, компоненты которой являются полиномами степени не выше, чем $s-1$, причем среди всех коэффициентов этих полиномов ровно s являются произвольными.*

Таким образом, если собственное значение кратное, то соответствующую ему часть общего решения можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пример 4. $y_1' = 4y_1 - y_2, \ \ y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3, \ \ y_3' = y_1 + y_3$. (с. з. 2 кр. 3)

10.2. Метод Лаппо-Данилевского

Если дано скалярное ДУ $y' = Ay$, где A — постоянный коэффициент, то легко записать его общее решение $y = e^{Ax}C$. Для векторных уравнений (т. е. для систем ДУ с постоянными коэффициентами) это также возможно. Нужно использовать теорию функций от матриц.

Пусть $f(\lambda)$ — функция скалярного аргумента. Что следует понимать под выражением $f(A)$, где A — матрица?

Можно разложить $f(\lambda)$ в степенной ряд и заменить в этом разложении степени λ на степени A (матрицы возводятся в степень, умножаются на скаляры и складываются; нулевая степень дает единичную матрицу E). Тогда $e^{Ax} = E + xA + \dfrac{x^2}{2!}A^2 + \ldots$. Если этот ряд сходится, то по построению матрица e^{Ax} удовлетворяет уравнению $y' = Ay$.

Но в теории функций от матриц вычисление e^{Ax} можно провести за конечное число шагов.

Алгоритм следующий.

1. Запишем характеристическую матрицу $A - \lambda E$ и найдем минимальный полином матрицы A по формуле $p(\lambda) = \dfrac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$, где $\Delta(\lambda)$ — характеристический полином (определитель характеристической матрицы), $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель миноров порядка $n-1$ характеристической матрицы. Удобно считать, что старший коэффициент $p(\lambda)$ равен 1.

2. Найдем корни минимального полинома и разложим его на множители
$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{s_m}$.

3. Запишем общую формулу для вычисления функции от матрицы
$$f(A) = \sum_{j=1}^{m}\Big[f(\lambda_j)Z_{j,1} + f'(\lambda_j)Z_{j,2} + \ldots + f^{s_j-1}(\lambda_j)Z_{j,s_j}\Big],$$
где $Z_{j,k}$ — некоторые постоянные матрицы (они будут найдены на следующем шаге).

4. Найдем матрицы $Z_{j,k}$ из нескольких равенств, в которых $f(A)$ для простых полиномов $f(\lambda)$ вычислено двумя способами: заменой λ на A и по общей формуле.

5. Вычислим фундаментальную матрицу $Y(x) = f(A) = e^{Ax}$ по скалярной функции $f(\lambda) = e^{\lambda x}$.

Пример 1. $y_1' = 2y_1 + y_2, \;\; y_2' = 3y_1 + 4y_2$.

Пример 2. $y_1' = 4y_1 - y_2, \;\; y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3, \;\; y_3' = y_1 + y_3$. (с. з. 2 кр. 3)

Наблюдение: метод Лаппо-Данилевского лучше применять в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов.

Кроме этих двух методов при решении примеров можно использовать метод исключения, метод интегрируемых комбинаций и другие методы.

10.3. Решение систем линейных уравнений методом исключения

Иногда имеем смысл переходить от системы линейных ДУ 1-го порядка к линейному ДУ относительно одной из искомых функций.

Теорема. *Любая компонента искомого решения нормальной системы является решением линейного дифференциального уравнения порядка не выше, чем n.*

Доказательство. Самое простое — на примере.

Более универсальное можно построить так. Возьмем первое уравнение нормальной системы $y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_j(x)$, продифференцируем его и заменим все производные искомых функций в правой части полученного равенства на правые части уравнений исходной системы. Приведем подобные члены и опять продифференцируем уравнение. Опять заменим все производные искомых функций в правой части полученного равенства на правые части уравнений исходной системы. Так будем поступать до тех пор, пока слева не появится производная порядка n функции $y_1(x)$. Тогда будем иметь систему линейных алгебраических уравнений: слева — производные функции $y_1(x)$, справа — искомые функции без производных с некоторыми коэффициентами. Запишем по правилу Крамера, чему равно решение $y_1(x)$ этой системы. Получится, что эта функция выразится линейно через свои же производные. Это равенство и есть искомое уравнение. •

11. Операционный метод

О. Хевисайд предложил простой метод, состоящий из нескольких формальных шагов, с помощью которого легко получить решение ДУ с постоянными коэффициентами. Строгое обоснование этого метода было построено значительно позже.

11.1. Преобразование Лапласа

Функции $f(x),\; x > 0$ (*оригинал*) ставится в соответствие функция $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, e^{-xp}\, dx,\; p > 0$ (*изображение*). *Преобразование Лапласа* $f(x) \mapsto F(p)$. Обозначение: $f(x) \doteq F(p)$.

Свойства:

1) $\alpha f(x) + \beta g(x) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$
2) $f(\lambda x) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right),\; \lambda > 0$
3) $f'(x) \doteq pF(p) - f(0),\;\; f^{(n)}(x) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
4) $F^{(n)}(p) \doteq (-x)^n f(x)$
5) $\int\limits_0^x f(t)\, dt \doteq \frac{F(p)}{p}$
6) $\int\limits_p^{+\infty} F(t)\, dt \doteq \frac{f(x)}{x}$
7) $f(x-a) \doteq e^{-pa}\, F(p)$
8) $F(p-b) \doteq e^{bx}\, f(x)$
9) $F(p)\, G(p) \doteq \int\limits_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$

Таблица:

$f(x)$	0	1	e^{ax}	$\cos bx$	$\sin bx$	$e^{ax}\cos bx$	$e^{ax}\sin bx$	x^n	$e^{ax}x^n$
$F(p)$	0	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\dfrac{p}{p^2+b^2}$	$\dfrac{b}{p^2+b^2}$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

Как найти оригинал по изображению?

Пример 1. $\dfrac{2}{p^2+4p+3} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+3} \doteq e^{-x} - e^{-3x}$.

Пример 2. $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot x - \sin x.$

11.2. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

В задаче Коши $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y = f(x),\ x > 0,\ y(0) = b_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$ перейдем к изображениям. Получим $Y(p) = \dfrac{F(p)+Q(p)}{P(p)}$, где $F(p)$ — изображение правой части, $P(p)$ — характеристический полином, а полином $Q(p)$ удобно строить с помощью треугольной таблицы.

Пример 3. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$

Пример 4. $y_1' + 3y_1 + y_2 = 0,\ y_2' - y_1 + y_2 = 0,\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1.$

11.3. Модели электрических цепей

Электрическая цепь состоит из *двухполюсников*. Состояние двухполюсника характеризуют *сила тока* $i(t)$ и *падение напряжения* $u(t)$. Для резистора $u(t) = R\,i(t)$, для катушки $u(t) = L\,i'(t)$, для конденсатора $u'(t) = \frac{1}{C}\,i(t)$ или $u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau$.

Законы Кирхгофа: I) сумма токов, втекающих в каждый узел цепи, равна нулю; II) падение напряжения вдоль любого замкнутого контура равно нулю.

Для колебательного контура, составленного из резистора, конденсатора, катушки и источника напряжения $u(t)$ получим уравнение $Ri(t) + u_C(0) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau + Li'(t) + u(t) = 0$, которое можно решить операционным методом.

Имеет смысл перейти к изображениям токов и напряжений при описании элементов цепи. Тогда для резистора $U(p) = R\,I(p)$, для катушки $U(p) = L[pI(p) - i(0)]$, для конденсатора $U(p) = \dfrac{u(0)}{p} + \dfrac{1}{C}\,\dfrac{I(p)}{p}$. Уравнение для изображения силы тока $I(p)[R + \dfrac{1}{Cp} + Lp] = -U(p) - \dfrac{u(0)}{p} + Li(0)$.

При переходе к изображениям вводится новое понятие — *операционное сопротивление* или импеданс (коэффициент в линейной зависимости напряжения от тока). При последовательном соединении двухполюсников операционные сопротивления складываются, а при параллельном ?

12. Решение ДУ с помощью степенных рядов

Можно искать решения линейных дифференциальных уравнений в виде $y = y_0(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, где $y_0(x)$ — некоторая функция и x_0 — некоторое число. Нужно подобрать коэффициенты a_n ряда так, чтобы его сумма (ряд должен сходиться) удовлетворяла ДУ.

12.1. Элементы аналитической теории ДУ

Функция $f(x)$ называется *аналитической в точке* x_0, если она может быть представлена в окрестности этой точки в виде сходящегося ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. В общем случае можно рассматривать комплекснозначные функции.

Один из основных вопросов аналитической теории ДУ : если коэффициенты линейного ДУ являются аналитическими функциями, то будут ли его решения такими же ?

Рассмотрим однородное линейное ДУ 2-го порядка
$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \quad (1)$

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения (1) — аналитические в точке x_0 функции, $p_0(x_0) \neq 0$, то существует два аналитических в точке x_0 линейно независимых решения этого уравнения.*

Идея доказательства такая. Будем искать решение уравнения (1) в виде степенного ряда. Подставим его сумму в уравнение и получим систему уравнений для определения коэффициентов a_n. Два коэффициента останутся произвольными. После приведения подобных членов получится, что выражения при этих коэффициентах и есть искомые решения. Так будет решено уравнение Эйри в следующем пункте. •

Замечание. Условие $p_0(x_0) \neq 0$ существенно.

Пример 1. $x^2\,y''+x\,y'+(x^2-1/4)\,y=0$. Замена искомой функции $y=z/\sqrt{x}$, два частных решения $\sin x/\sqrt{x}\ \cos x/\sqrt{x}$ — не аналитические функции в точке 0.

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения (1) — аналитические в точке x_0 функции и эта точка является нулем порядка s функции $p_0(x)$, нулем порядка $s-1$ функции $p_1(x)$ и нулем порядка $s-2$ или выше функции $p_2(x)$, то существует по крайней мере одно ненулевое решение уравнения вида $y=(x-x_0)^k f(x)$, где k — некоторое число, а $f(x)$ — аналитическая в точке x_0 функция.*

Доказательство сводится к следующему. Поделим уравнение на $p_0(x)$ (при $x\neq x_0$) и получим $y''+\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_n(x-x_0)^n}{x-x_0}\,y'+\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q_n(x-x_0)^n}{(x-x_0)^2}\,y=0$. Будем искать его решения в виде $y=(x-x_0)^k\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$. Подставим это выражение в уравнение и приравняем нулю коэффициенты при степенях $x-x_0$. Кроме уравнений для определения коэффициентов a_n получим определяющее уравнение $k(k-1)+p_0k+q_0=0$.

Пусть k_1, k_2 — корни определяющего уравнения. Если их разность — не целое число, то найдутся два линейно независимых решения уравнения (1). Если их разность — целое число, то, может быть, будет получено только одно частное решение. Второе нужно искать методом понижения порядка линейного уравнения. В этом случае обычно получается так, что если удается найти только одно частное решение $y_1(x)$, то второе решение имеет вид

$y_2(x)=y_1(x)\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{k_2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n(x-x_0)^n$.

В следующем пункте будет рассмотрено уравнение Бесселя с такими свойствами. •

Пример 2. $x^2y''+ax\,y'+b\,y=0$.

12.2. Уравнение Эйри и уравнение Бесселя

Уравнение $y''+xy=0$ называют *уравнением Эйри*. Будем искать его решения в виде $y=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Предположим, что этот ряд сходится и его сумму можно почленно дифференцировать. Если так и окажется после того, как будут определены коэффициенты ряда, то найдено то, что искали. Если не так, то ДУ не имеет решений, представимых в виде суммы степенного ряда.

Подставим сумму ряда в уравнение и получим $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n\,n(n-1)\,x^{n-2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=0$. Тогда

при x^0 : $a_2\cdot 2\cdot 1=0$,
при x^1 : $a_3\cdot 3\cdot 2+a_0=0$,
при x^2 : $a_4\cdot 4\cdot 3+a_1=0$,
при x^3 : $a_5\cdot 5\cdot 4+a_2=0$,
...
при x^{n-2} : $a_n\cdot n\cdot(n-1)+a_{n-3}=0$
...

Отсюда $a_2=0,\ a_5=0,$ и так далее, т. е. $a_{3m-1}=0$. Коэффициенты a_0 и a_1 остаются произвольными постоянными, при этом $a_3=-\dfrac{a_0}{3\cdot 2},\ a_6=-\dfrac{a_3}{6\cdot 5}$, и так далее... $a_{3m}=\dfrac{(-1)^m a_0}{3m(3m-1)\ldots 3\cdot 2}$, $a_4=-\dfrac{a_1}{4\cdot 3},\ a_7=-\dfrac{a_4}{7\cdot 6}$, и так далее... $a_{3m+1}=\dfrac{(-1)^m a_1}{(3m+1)3m\ldots 4\cdot 3}$ (в знаменателях — не факториалы!).

Выделим два частных решения уравнения : при $a_0=1,\quad a_1=0$ и при $a_0=0,\quad a_1=1$: $y_1(x)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}a_{3m}x^{3m}=1+\ldots$ и $y_2(x)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}a_{3m+1}x^{3m+1}=x+\ldots$. Эти ряды равномерно сходятся по признаку Даламбера, их суммы можно почленно дифференцировать. Так что по построению эти функции — решения уравнения Эйри. Легко проверить, что их определитель Вронского (в точке $x=0$) не равен нулю, так что получена ФСР.

Доказано, что решения уравнения Эйри нельзя записать через элементарные функции. Решения ДУ, которые не выражаются через элементарные функции (но могут быть получены, например, как суммы сходящихся степенных рядов), принято называть *специальными функциями.*

Уравнение Бесселя имеет вид $x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$, здесь m — некоторое число (параметр). Будем искать решение этого ДУ в виде $y = x^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+k}$. Подставим это выражение в уравнение и получим систему уравнений для определения коэффициентов ряда :

при x^0 : $a_0 k(k-1) + a_0 k - m^2 a_0 = 0$,
при x^1 : $a_1 (k+1)k + a_1(k+1) - m^2 a_1 = 0$,
при x^2 : $a_2(k+2)(k+1) + a_2(k+2) - m^2 a_2 + a_0 = 0$,
при x^3 : $a_3(k+3)(k+2) + a_3(k+3) - m^2 a_3 + a_1 = 0$,
...
при x^n : $a_n(k+n)(k+n-1) + a_n(k+n) - m^2 a_n + a_{n-2} = 0$
...

Отсюда следует, прежде всего, определяющее уравнение $k^2 - m^2 = 0$. Кроме того, коэффициент a_0 остается произвольной постоянной, а все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю.

Выберем $k = m$. В этом случае $a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2 \cdot 1(m+1)}$ и так далее $\ldots a_{2j} = \dfrac{(-1)^j a_0}{2^{2j} j!\,(m+1)\ldots(m+j)}$. Положим для упрощения формул $a_0 = \dfrac{1}{2^m \Gamma(m+1)}$. Тогда получим частное решение уравнения Бесселя в виде $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(m+j+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2j+m}$. Ряд этот сходится, его сумму принято обозначать $J_m(x)$ и называть *функцией Бесселя* порядка m.

Если выбрать $k = -m$, то получим еще одно частное решение уравнения Бесселя $J_{-m}(x)$. Если число m — не целое, то найденные частные решения линейно независимы и образуют ФСР уравнения Бесселя. Если же m — целое число, то $J_{-m}(x) = J_m(x)$. В этом случае по функции Бесселя, как по частному решению линейного уравнения, можно найти другое частное решение уравнения Бесселя — *функцию Неймана* $Y_m(x) = J_m(x) \ln x + x^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Пример 1. $x^2 y'' + x y' + (3x^2 - 4) y = 0$.
Пример 2. $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/4) y = 0$.

13. Краевые задачи для линейных ДУ 2-го порядка

Рассмотрим линейное ДУ 2-го порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Краевая задача для этого уравнения ставится так: найти на отрезке $[x_1, x_2]$ решение, удовлетворяющее условиям
$\alpha_1 y'(x_1) + \beta_1 y(x_1) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y'(x_2) + \beta_2 y(x_2) = \gamma_2$.

Перечислим несколько свойств краевых задач.

I. *Краевая задача может иметь только одно решение, может иметь много решений, а может вообще не иметь решений.*

Доказательство. Приведем примеры на каждый случай:
1) $y'' + y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ (одно решение);
2) $y'' + y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0$ (бесконечно много решений);
3) $y'' + y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 1$ (решений нет).

Условия краевой задачи, заданные в точках x_1 и x_2, могут быть неоднородными в общем случае, а могут быть и однородными.

II. *Краевая задача с неоднородными краевыми условиями приводится к задаче с однородными краевыми условиями.*

Доказательство. Пусть $y_0(x)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям. Такая функция всегда найдется. Введем новую искомую функцию $z(x)$ так, что $y(x) = y_0(x) + z(x)$. Эта функция по построению должна удовлетворять однородным краевым условиям (но неоднородному уравнению, причем с другой правой частью).

Поэтому будем рассматривать в дальнейшем только однородные краевые условия в краевых задачах. Будем называть краевую задача однородной, если правая часть соответствующего ДУ равна нулю.

III. *Если у однородной краевой задачи имеется только нулевое решение, то неоднородная задача может иметь только одно решение.*

Доказательство. Разность решений неоднородной задачи является решением однородной задачи, следовательно, эта разность тождественно равна нулю, и тогда решения совпадают.

13.1. Метод пристрелки и метод прогонки

Предположим, что решение краевой задачи
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \;\; y'(x_1) + \alpha y(x_1) = 0, \;\; y'(x_2) + \beta y(x_2) = 0$
существует и единственно (однородная задачи имеет только нулевое решение).

Метод пристрелки состоит в следующем.

Пусть $y_1(x)$ — решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее условиям Коши
$y_1(x_1) = \gamma, \;\; y_1'(x_1) = -\alpha\gamma$, где γ — некоторое число.

Пусть $y_2(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям Коши
$y_2(x_1) = \delta, \;\; y_2'(x_1) = -\alpha\delta$, где δ — некоторое число.

Тогда $y(x) = y_1(x) + \varepsilon y_2(x)$ при любом значении ε — решение неоднородного ДУ, удовлетворяющее первому краевому условию. Подберем число ε так, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла бы и второму краевому условию, т.е. $y_1'(x_2) + \varepsilon y_2'(x_2) + \beta[y_1(x_2) + \varepsilon y_2(x_2)] = 0$. Отсюда $\varepsilon = -\dfrac{y_1'(x_2) + \beta y_1(x_2)}{y_2'(x_2) + \beta y_2(x_2)}$. (Если знаменатель дроби равен нулю, то у однородной краевой задачи было бы ненулевое решение $y_2(x)$).

Метод прогонки немного сложнее.

Запишем линейное ДУ 2-го порядка в виде $\left[\dfrac{d}{dx} + \mu\right] \cdot \left[\dfrac{d}{dx} + \nu\right] \cdot y = f(x)$, здесь функции $\mu(x)$ и $\nu(x)$ должны удовлетворять условиям $\mu(x) + \nu(x) = p(x)$ и $\nu'(x) + \mu(x)\nu(x) = q(x)$. Отсюда $\mu(x) = p(x) - \nu(x)$. Исключим функцию $\mu(x)$ из пары уравнений и добавим к ДУ для функции $\nu(x)$ условие Коши :
$\nu'(x) + \nu(x)[p(x) - \nu(x)] = q(x), \;\; \nu(x_1) = \alpha.$

Обозначим $z(x) = y'(x) + \nu(x)y(x)$. Добавим к уравнению для функции $z(x)$ условие Коши :
$z'(x) + [p(x) - \nu(x)]z(x) = f(x), \;\; z(x_1) = 0.$

Наконец, запишем условия задачи Коши для функции $y(x) : y'(x) + \nu(x)y(x) = z(x), \;\; y(x_2) = A.$ Значение постоянной A определяется из системы уравнений
$y'(x_2) + \beta y(x_2) = 0, \;\; y'(x_2) + \nu(x_2)y(x_2) = z(x_2)$. Отсюда $A = \dfrac{z(x_2)}{\nu(x_2) - \beta}$.

В итоге получилось, что решение краевой задачи для ДУ 2-го порядка свелось к последовательному решению трех задач Коши для ДУ 1-го порядка.

13.2. Метод функции Грина

Рассмотрим краевую задачу $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \;\; y'(x_1) + \alpha y(x_1) = 0, \;\; y'(x_2) + \beta y(x_2) = 0.$

Теорема 1. *Если однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то существует такая функция $G(t, x)$ (функция Грина), что решение краевой задачи имеет вид*
$y(x) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)G(t, x)\, dt.$

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее первому краевому условию, и $y_2(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее второму краевому условию. Функция $y_1(x)$ не может удовлетворять второму краевому условию (иначе $y_1(x)$ будет ненулевым решением однородной краевой задачи). Аналогично, функция $y_1(x)$ не может удовлетворять первому краевому условию.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — ФСР однородного линейного уравнения. Если предположить, что их определитель Вронского $W(x)$ равен нулю, и, следовательно, строки его пропорциональны, получается, что каждая из этих функций удовлетворяет двум краевым условиям. Будем искать решение неоднородной краевой задачи методом вариации произвольных постоянных, т. е. в виде $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.

Запишем систему уравнений для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:
$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \;\; C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$
Отсюда $C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}, \;\; C_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$
и $C_1(x) = \int\limits_{x}^{x_2} \frac{f(t)y_2(t)}{W(t)}\, dt + c_1, \quad C_2(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}\, dt + c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, общее решение ДУ

$y(x) = y_1(x) \int\limits_{x}^{x_2} \frac{f(t)y_2(t)}{W(t)}\, dt + c_1 y_1(x) + y_2(x) \int\limits_{x_1}^{x} \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}\, dt + c_2 y_2(x).$

Чтобы это решение удовлетворяло краевым условиям, должно быть $c_1 = 0,\ \ c_2 = 0$.

Объединим интегралы и получим, что $G(t,x) = \left\{ t < x\ :\ \frac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)};\ \ t > x\ :\ \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)} \right\}$. •

Пример. $y'' - y' = f(x),\ \ y(0) = 0,\ \ y'(1) = 0$.

13.3. Самосопряженные ДУ

Если однородная краевая задача имеет ненулевое решение, то также можно использовать метод функции Грина.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L[y] = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j(x) y^{(j)}$. *Сопряженным* к нему называется линейный дифференциальный оператор $L^*[y] = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j (p_j(x)y)^{(j)}$.

Оператор $L[y]$ называется *самосопряженным*, если $L^*[y] = L[y]$.

При $n = 2$ имеем $L[y] = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y$ и $L^*[y] = (p_2(x)y)'' - (p_1(x)y)' + p_0(x)y$. Отсюда видно, что линейный дифференциальный оператор 2-го порядка является самосопряженным тогда и только тогда, когда $p_2'(x) = p_1(x)$.

Лемма 1. *Любое линейное однородное уравнение 2-го порядка можно привести к самосопряженному виду.*

Доказательство. Умножим уравнение $L[y] = 0$ на функцию $\mu(x)$ и потребуем, чтобы новое уравнение было самосопряженным. Тогда функция $\mu(x)$ должна удовлетворять условию $[(\mu(x)p_0(x)]' = \mu(x)p_1(x)$. Решение этого уравнения с разделяющимися переменными может быть найдено в квадратурах. •

Поэтому линейные самосопряженные ДУ 2-го порядка будем записывать в виде

$L[y] = (p(x)y')' + q(x)y = 0$.

Лемма 2. *Если* $L[y]$ *— самосопряженный дифференциальный оператор 2-го порядка, то* $L[y](x)z(x) - y(x)L[z](x) = [p(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))]'$ *(тождество Лагранжа).*

Доказательство — непосредственная проверка. Раскроем скобки слева и справа и получим одно и то же. •

Следствие. $\int\limits_{x_1}^{x_2} \{L[y](t)z(t) - y(t)L[z](t)\}\, dt = [p(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))]\Big|_{x_1}^{x_2}$ *(тождество Грина).*

Рассмотрим краевую задачу для самосопряженного ДУ 2-го порядка

$L[y] = f(x),\ \ y(x_1) = 0,\ \ y(x_2) = 0$.

Теорема 2. *Если однородная краевая задача имеет ненулевое решение* $y_0(x)$, *то неоднородная краевая задача разрешима тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\, y_0(t)\, dt = 0$. *При этом ее решение имеет вид* $y(x) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)G(t,x)\, dt$, *где* $G(t,x)$ *— обобщенная функция Грина.*

Условие разрешимости краевой задачи — следствие формулы Грина. Если $y(x)$ — решение неоднородной задачи и $y_0(x)$ — решение однородной задачи, то $L[y] = f(x)$ и $L[y_0] = 0$, а в силу краевых условий в правой части формулы Грина все слагаемые равны нулю.

Так как решение неоднородной краевой задачи определяется с точностью до слагаемого $cy_0(x)$, то и в обобщенной функции Грина должна содержаться произвольная постоянная.

Пример. $y'' + y = f(x),\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$.

13.4. Задача на собственные значения (задача Штурма-Лиувилля)

Пусть $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ — самосопряженный дифференциальный оператор и функция $r(x) > 0$. *Задача Штурма-Лиувилля* (или *задача на собственные значения*) состоит в следующем: найти значения параметра λ, при которых существует ненулевое решение краевой задачи

$L[y] + \lambda r(x) y = 0,\ \ \alpha_1 y'(x_1) + \beta_1 y(x_1) = 0,\ \ \alpha_2 y'(x_2) + \beta_2 y(x_2) = 0.$

Такие значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им ненулевые решения задачи — *собственными функциями.*

Пример. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. СЗ $\lambda_n = n^2$, СФ $y_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$

Перечислим основные свойства собственных значений (СЗ) и собственных функций (СФ).

I. *Существует бесконечное счетное множество СЗ и соответствующих им СФ задачи на собственные значения.*

Доказывается это трудно. Один из способов — перейти к интегральному уравнению с параметром λ.

II. *Каждому СЗ соответствует единственная СФ (с точностью до постоянного множителя).*

Доказательство. Предположим, что СЗ λ соответствует две СФ $y_1(x)$ и $y_2(x)$, причем они линейно независимы. Тогда, например при $x = x_1$ имеем $\alpha_1 y_1'(x_1) + \beta_1 y_1(x_1) = 0$, $\alpha_1 y_2'(x_1) + \beta_1 y_2(x_1) = 0$. Определитель этой системы уравнений (определитель Вронского) равен нулю. Поэтому функции не могут быть линейно независимыми. •

Замечание. Для краевых задач с другими краевыми условиями одному СЗ могут соответствовать несколько линейно независимых СФ.

Пример. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) - y(2\pi) = 0$, $y'(0) - y'(2\pi) = 0$.

III. *Если краевые условия имеют вид $y(x_1) = 0$, $y(x_2) = 0$ и $p(x) \geq 0$, $q(x) \leq 0$, то все СЗ задачи Штурма-Лиувилля положительны.*

Доказательство. Тождество $(py_n')' + qy_n + \lambda_n r y_n = 0$ умножим на y_n и проинтегрируем от x_1 до x_2. Получим $\lambda_n \int\limits_{x_1}^{x_2} r(x) y_n^2(x)\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x) y_n'^2(x)\, dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} q(x) y_n^2(x)\, dx.$ •

IV. *СФ $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля образуют на отрезке $[x_1, x_2]$ ортогональную с весом $r(x)$ систему функций.*

Доказательство. Пусть $L[y_n] + \lambda_n r(x) y_n(x) = 0$, $L[y_m] + \lambda_m r(x) y_m(x) = 0$.
Запишем тождество Грина

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (L[y_m](t) y_n(t) - y_m(t) L[y_n](t))\, dt = (\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_{x_1}^{x_2} r(t) y_m(t) y_n(t)\, dt =$$

$$= p(x)(y_m'(x) y_n(x) - y_m(x) y_n'(x))\Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \quad \bullet$$

V. (Теорема Стеклова). *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет краевым условиям, то она разлагается в равномерно сходящийся на $[x_1, x_2]$ ряд по СФ задачи Штурма-Лиувилля.*

Без доказательства.

14. Динамические системы. Теория устойчивости

Динамической системой (или автономной) называют систему ДУ вида $x' = f(x)$, здесь $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция.

Если задана система ДУ в нормальной форме $x' = f(t, x)$, то всегда можно перейти к динамической системе, если ввести новую искомую функцию $x_{n+1} = t$.

Напомним, что пространство переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется фазовым пространством, а графики решений динамической системы — траекториями.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой области фазового пространства и удовлетворяет условию Липшица в каждом ограниченном замкнутом множестве, содержащемся в этой области. Тогда через каждую точку области проходит какая-то траектория, причем только одна (задача Коши имеет решение, и оно единственно).

14.1. Свойства решений динамических систем

I. *Если $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ — две траектории и $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, то $\psi(t) = \varphi(t + t_1 - t_2)$ (если траектории имеют общую точку, то они совпадают).*

Доказательство. Если $x = \varphi(t)$ — решение динамической системы, то $x = \varphi(t+c)$ — тоже. Найдем значение постоянной c так, чтобы $\varphi(t_2 + c) = \varphi(t_1)$. Очевидно, $c = t_1 - t_2$. Решения $x = \varphi(t + c)$ и $x = \psi(t)$ удовлетворяют одному и тому же условию Коши. Следовательно, они совпадают. •

Решение динамической системы вида $x = a$, a — постоянный вектор, называется *точкой покоя* (или *положением равновесия*). Ясно, что $x = a$ точка покоя тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$.

Число p называется *периодом* решения $x = \varphi(t)$, если $\varphi(t+p) = \varphi(t)\ \ \forall t$. Будем обозначать P множество всех периодов решения $x = \varphi(t)$.

II. *1) если $p \in P$, то $-p \in P$; 2) если $p_1,\ p_2 \in P$, то $p_1+p_2 \in P$; 3) P — замкнутое множество.*

Первые два утверждения очевидны. Докажем третье. Пусть $p_n \to p_0$. Тогда
$\varphi(t+p_0) = \varphi(t+\lim p_n) = \lim \varphi(t+p_n) = \lim \varphi(t) = \varphi(t)$. •

Решение $x = \varphi(t)$ динамической системы называется *периодическим*, если
1) $\exists p > 0\ \ :\ \ \varphi(t+p) = \varphi(t)\ \ \forall t$; 2) $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)\ \ \forall t_1, t_2\ \mid\ 0 < |t_1 - t_2| < p$.
Траекторию периодического решения называют *циклом.*

III. *Если траектория динамической системы сама себя пересекает, то она — или цикл, или точка покоя.*

Доказательство. Пусть $x = \varphi(t)$ — решение динамической системы, определенное при $a < t < b$. Пусть найдутся $t_1, t_2 \in (a,b)$ такие, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, причем $c = t_1 - t_2 > 0$.
Рассмотрим функцию $\psi(t) = \{a < t < b\ \ :\ \ \varphi(t);\ \ a - c < t \leq a\ \ :\ \ \varphi(t+c)\}$. Эта функция также является решением динамической системы, но уже в другом интервале. Продолжим ее таким способом на всю числовую прямую $(-\infty, +\infty)$. Так как $\psi(t+c) = \psi(t)$, то c — период.

Рассмотрим множество P всех периодов решения $x = \psi(t)$ (это множество — не пустое). Возможны два случая: 1) в P найдется наименьшее положительное число; 2) не найдется.

Пусть p_0 — наименьшее положительное число в P, $\psi(t+p) = \psi(t)$. Пусть $0 < |t_1 - t_2| < p_0$. Предположим, что $\psi(t_1) = \psi(t_2)$. Тогда $\psi(t) = \psi(t + t_1 - t_2)$ и, следовательно, $t_1 - t_2$ — период, меньший, чем p_0. Противоречие. В этом случае траектория $x = \psi(t)$ — цикл.

Во втором случае найдется последовательность периодов, сходящаяся к нулю : $p_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Возьмем некоторое значение t и построим последовательность чисел $\alpha_n = \frac{t}{p_n} - \left[\frac{t}{p_n}\right]$ (здесь $[\,]$ — целая часть). Эта последовательность ограничена. При этом $\lim \left\{t - \left[\frac{t}{p_n}\right] p_n\right\} = \lim(\alpha_n p_n) = 0$. Числа $\left[\frac{t}{p_n}\right] p_n$ являются периодами решения $x = \psi(t)$: $\psi(t) = \psi\left(t - \left[\frac{t}{p_n}\right] p_n\right)$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $n \to +\infty$ и получим, что $\psi(t) = \psi(0)$. •

Таким образом, *любая траектория динамической системы или является циклом, или точка покоя, или сама себя не пересекает.*

14.2. Траектории динамических систем на плоскости

Рассмотрим траектории линейных динамических систем 2-го порядка с вещественными постоянными коэффициентами, т. е. систем уравнений вида $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$. По собственным значениям λ_1, λ_2 матрицы коэффициентов и соответствующим им собственным векторам h^1, h^2 построим траектории на плоскости.

1) Пусть собственные значения — вещественные и различные. Общее решение динамической системы имеет вид $x(t) = c_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h^2 e^{\lambda_2 t}$.

a) Если $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$, то имеем семейство линий на плоскости, проходящих через начало координат. При $t \to +\infty$ точка $x = \varphi(t)$ движется по траекториям к началу координат. Такое расположение траекторий называют *устойчивым узлом.*

b) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то рисунок точно такой же, но при $t \to +\infty$ точка $x = \varphi(t)$ движется по траекториям от начала координат в бесконечно удаленную точку. Такое расположение траекторий называют *неустойчивым узлом.*

c) Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то траектории асимптотически приближаются к прямым, построенным как продолжение собственных векторов. Такое расположение траекторий называют *седлом.*

Аналогичным образом исследуются остальные возможные случаи.

2) Собственные значения комплексные — *точка покоя* и *центр.*

3) Одно из собственных значений равно нулю.

4) Собственные значения вещественные и равны друг другу (кратное СЗ) — *фокус.*

14.3. Теоремы об устойчивости и неустойчивости

Рассмотрим систему ДУ в нормальной форме $x_k' = f_k(t, x_1, \ldots, x_n),\ \ k = 1\,..\,n\quad (1)$.
Условие Коши $x_k(t_0) = x_k^0$ позволяет из множества всех ее траекторий выделить единственную — проходящую через заданную точку.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных следует, что если начальные точки двух траекторий расположены близко друг от друга, то эти траектории мало отличаются друг от друга при $t > t_0$, но, вообще говоря, при малых значениях $t - t_0$.

В теории устойчивости исследуется поведение траекторий, начальные точки которых близки, при сколь угодно больших значениях t.

Решение $\varphi_k(t),\ \ k = 1\,..\,n$ системы ДУ (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если
$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ |\ \ |\varphi_k(t) - x_k(t)| < \varepsilon,\ \ k = 1\,..\,n\ \ \forall t \geq t_0$
для любого решения $x_k(t),\ \ k = 1\,..\,n$ системы (1), такого, что $|\varphi_k(t_0) - x_k(t_0)| < \delta,\ \ k = 1\,..\,n$.
Это определение сводится к тому, что траектория устойчива, если любая другая траектория, начинающаяся в окрестности ее начальной точки, нигде не отклоняется далеко от нее.

Если это условие не выполняется, то решение системы (1) называется *неустойчивым.*

Если решение системы (1) устойчиво по Ляпунову и, кроме того, $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi_k(t) - x_k(t)| = 0,\ \ k = 1\,..\,n$, то это решение называется *асимптотически устойчивым.*

Пример. $x' = kx,\ \ x(t_0) = x_0$. Решение $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$ устойчиво при $k \leq 0$, асимптотически устойчиво при $k < 0$ и неустойчиво при $k > 0$.

После замены искомой функции исследование на устойчивость некоторого решения системы (1) всегда можно свести к исследованию на устойчивость нулевого решения новой системы.

Теорема 1. (Ляпунова об устойчивости) *Если существует дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям*
1) $v(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ *и обращается в нуль в начале координат;*
2) производная вдоль траектории $\frac{dv}{dt} \leq 0\ \ \forall t \geq t_0$,
то тривиальное решение системы (1) устойчиво.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Найдется такое число $c > 0$, что поверхность уровня $v = c$ расположена внутри ε-окрестности начала координат. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что δ-окрестность начала координат расположена внутри области, ограниченной поверхностью уровня $v = c$.

Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ вдоль траектории не возрастает. Следовательно, если $v[x(t_0)] < c$, то траектория $v[x(t)]$ не выходит за пределы поверхности уровня, а тогда и за пределы ε-окрестности начала координат. •

Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией Ляпунова.

Пример 1. $x_1' = -x_1 x_2^4,\ \ x_2' = x_1^4 x_2$; здесь $v = x_1^4 + x_2^4$.

Теорема 2. (Ляпунова об асимптотической устойчивости) *Если существует функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям теоремы 1 и, кроме того, условию*
3) вне сколь угодно малой окрестности начала координат $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0\ \ \forall t \geq t_1 > t_0$,
то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что любая траектория, начальная точка которой лежит в δ-окрестности начала координат, не выходит за пределы ε-окрестности начала координат. Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ не возрастает вдоль траектории. Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \alpha \geq 0$. Предположим, что $\alpha > 0$. Тогда при $t > t_0$ траектория расположена в области $v \geq \alpha$, т. е. вне некоторой окрестности начала координат. Интегрируем неравенство из условия 3) от t_1 до t : $v(t) - v(t_1) \leq -\beta(t - t_1)$. Отсюда следует, что при $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) < 0$. Противоречие. Следовательно, $\alpha = 0$. •

Пример 2. $x_1' = -x_1^3 - x_2,\ \ x_2' = x_1 - x_2^3$; здесь $v = x_1^2 + x_2^2$.

Теорема 3. (Четаева о неустойчивости) *Если существует дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат условиям:*
1) в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область, в которой $v > 0$ *и на границе этой области* $v = 0$*;*
2) $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$ *в области, где* $v \geq \alpha > 0$,
то тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть начальная точка траектории $x(t_0)$ принадлежит сколь угодно малой окрестности начала координат, $v[x(t_0)] = \alpha > 0$. По условию 2) функция v вдоль траектории не убывает.

Предположим, что траектория не выходит за пределы окрестности начала координат. Интегрируем неравенство из условия 2) : $v(t) - v(t_0) \geq \beta(t - t_0)$. При $t \to +\infty$ получим, что функция $v(t)$ неограниченно возрастает. Противоречие. •

Пример 3. $x_1' = x_1^5 + x_2^3,\ \ x_2' = x_1^3 + x_2^5$; здесь $v = x_1^4 - x_2^4$.

15. Уравнения с частными производными 1-го порядка

Уравнение с частными производными 1-го порядка имеет вид $F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0$, здесь $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, зависящая от n независимых переменных.

15.1. Линейные уравнения с частными производными 1-го порядка

Линейным уравнением с частными производными 1-го порядка называется уравнение вида
$a_1(x_1, \ldots, x_n)\, \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (1).$
Ему ставится в соответствие система обыкновенных ДУ *в симметрической форме*
$\dfrac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \dfrac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)} \quad (2).$

Первым интегралом системы (2) называется функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая постоянные значения на траекториях системы. Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$ — решение системы (2), то функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — первый интеграл.

Теорема 1. *Функция $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она является первым интегралом системы (2).*

Доказательство. Запишем решение системы (2) в параметрической форме $x_j = x_j(t)$ и вычислим производную функции $\psi(t) = \psi(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ по параметру t (производную первого интеграла вдоль траектории). Ее выражение совпадает с левой частью уравнения (1). Если производная равна нулю, то функция постоянна, и наоборот. •

Первые интегралы $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n),\ \ j = 1..n-1$ называются независимыми, если якобиан
$\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$

Теорема 2. *Если $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n),\ \ j = 1..n-1$ — независимые первые интегралы системы (2), то любое решение уравнения (1) $u = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, где $F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ — некоторая дифференцируемая функция.*

Доказательство. Нужно записать систему из уравнений (1) для первых интегралов и для искомого решения, а затем применить теорему о неявной функции. •

Пример 1. $(x_2 - x_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + (x_3 - x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 - x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0$. Первые интегралы $x_1 + x_2 + x_3$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Если задать некоторое дополнительное условие, например, условие Коши, то функция F в решении уравнения (1) может быть найдена.

Пример 2. $\cos y\, \dfrac{\partial u}{\partial x} + \cos x\, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = \sin y$. Ответ: $u = \sin y - \sin x$.

15.2. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка

Квазилинейным уравнением с частными производными 1-го порядка называется уравнение вида
$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\, \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = a_0(x_1, \ldots, x_n, u) \quad (3).$

Теорема 3. *Квазилинейное уравнение с частными производными приводится к линейному уравнению.*

Доказательство. Будем искать решение уравнения (3) как неявную функцию, удовлетворяющую уравнению $v(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$. Найдем отсюда производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \Big/ \dfrac{\partial v}{\partial u}$ и подставим в уравнение (3). Получим линейное уравнение для новой искомой функции v. Для этого уравнения соответствующая система в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n,u)} = \frac{du}{a_0(x_1,\ldots,x_n,u)} \quad (4). \quad \bullet$$

Следствие. *Любое решение квазилинейного уравнения дает формула* $\Psi(\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n,u)) = 0$, *где* $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n,u)$, $j = 1\,.\,.\,n$, *— независимые первые интегралы системы (4).*

Пример. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} = u$. Общее решение $F\Big(y, \frac{x}{y} - \ln u\Big) = 0$.

Условие Коши для квазилинейного уравнения: $u = f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ при $x_n = a$.

Пример. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u(1,y) = 2y$. Ответ: $u = -2u\Big(\ln x - \dfrac{y}{u}\Big)$.

16. Основы вариационного исчисления

Задачи *вариационного исчисления* (ВИ) — задачи поиска экстремумов интегральных функционалов, подинтегральные выражения которых содержат искомую функцию и ее производные.

Простейшая задача ВИ : $F[y] = \int\limits_a^b f(x,y,y')\ dx \to \text{extr},\ y(a) = A,\ y(b) = B$. Здесь $y = y(x)$ — искомая непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]$, A и B — заданные числа. Будем предполагать, что функция $f(x,y,y')$ имеет непрерывные частные производные.

Пусть $h = h(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. *Вариацией функционала F по направлению h* называется $\delta F[y;h] = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{d}{d\lambda} F[y+\lambda h]$. Будем рассматривать такие функции $h(x)$, что $h(a) = h(b) = 0$.

Лемма 1. *Если функция $y_0(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $F[y]$ и существует вариация $\delta F[y_0;h]$, то $\delta F[y_0;h] = 0\ \ \forall h$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(\lambda) = F[y_0+\lambda h]$. Если y_0 — точка экстремума функционала, то у этой функции экстремум при $\lambda = 0$. $\bullet$

Лемма 2. *Если $g(x)$ — непрерывная функция и $\int\limits_a^b g(x)h(x)\ dx = 0$ при любой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$, то $g(x) = 0\ \ \forall x \in [a,b]$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $g(x_0) \neq 0$. Построим такую функцию $h(x)$, что интеграл от $g(x)h(x)$ будет строго положительным. $\bullet$

Теорема. *Если $y(x)$ — решение простейшей задачи ВИ, то эта функция — решение уравнения Эйлера* $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$.

Доказательство. Вычислим вариацию функционала в простейшей задаче и приравняем ее нулю. Преобразуем слагаемое с производной функции $h(x)$ по формуле интегрирования по частям. Применим лемму 2. $\bullet$

Получили, что решение простейшей задачи ВИ является решением краевой задачи для ДУ 2-го порядка.

Задача. Найти линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки. Имеем простейшую задачу ВИ $\int\limits_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\ dx \to \min,\ y(a) = A,\ y(b) = B$.

Это пока все :-(*PNB*