КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Б. Плещинский

ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Казань
2018

УДК 517.98

*Публикуется по решению
учебно-методической комиссии
Института вычислительной математики и информационных технологий,
по рекомендации кафедры прикладной математики*

Рецензенты:
доктор пед. наук, профессор **Н.К. Нуриев**,
канд. физ.-мат. наук, доцент **А.М. Сидоров**

Плещинский Н.Б.
Прикладной функциональный анализ: Учебное пособие / Н.Б. Плещинский. – Казанский федеральный университет, 2018. – 80 с.

Изложены избранные разделы прикладного функционального анализа: теория двойственности и операторы Нетера, абстрактные приближенные схемы и элементы теории экстремальных задач.

Для бакалавров и магистрантов математических институтов и факультетов, изучающих функциональный анализ и интересующихся его приложениями.

УДК 517.98

Предисловие

Функциональный анализ возник при обобщении на более абстрактный уровень понятий и утверждений линейной алгебры, геометрии и математического анализа. Можно изучать его как строгую математическую теорию, но не менее интересно извлекать из абстрактных утверждений следствия, нужные при решении конкретных задач. Прикладной функциональный анализ ориентирован именно на последнее.

На содержание книг по ФА влияют научные интересы авторов. В данном учебном пособии изучаются линейные операторы и линейные уравнения, обобщающие такие базовые объекты математики как системы линейных алгебраических уравнений и линейные интегральные уравнения. Приняты два принципа изложения материала: 1) при построении теории исходные предположения должны быть минимальными, даже, может быть, в ущерб краткости доказательств; 2) каждое новое понятие или утверждение должны быть обобщением на новый уровень чего-либо уже известного.

В первой главе построена абстрактная теория двойственности линейных пространств и линейных операторов, причем в случае, когда в пространствах не определена норма, не требуется их полнота и даже не вводится явно топология.

Вторая глава посвящена исследованию свойств операторов Нетера, которые представляют собой естественное обобщение линейных операторов, действующих в конечномерных пространствах, и интегральных операторов.

Третья глава содержит основы теории абстрактных приближенных схем, которые используются при обосновании различных численных методов решения линейных уравнений.

В четвертой главе рассмотрены некоторые экстремальные задачи, для решения которых применяются построения предыдущих глав.

Учебное пособие написано по материалам курсов лекций, которые автор читал и читает для бакалавров и магистрантов Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

PNB

Глава 1. Теория двойственности

Как известно из курса линейной алгебры, в теоремах о разрешимости систем линейных уравнений участвуют решения СЛАУ с транспонированной матрицей. Абстрактная теория линейных операторов может быть построена по аналогии, на основе двойственности линейных пространств и линейных операторов. Мы используем алгебраический вариант теории двойственности, когда в линейных пространствах не определена норма, не требуется их полнота и даже не вводится явно топология.

1. Множества и отображения

Разумеется, читатель знаком с элементарными понятиями современной математики.

Как известно, множества состоят из элементов. Будем использовать общепринятые обозначения: $x \in \mathrm{X}$ – элемент x принадлежит множеству X, и $y \notin \mathrm{Y}$ – элемент y не принадлежит множеству Y. Множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент A принадлежит также и B, обозначается это $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Пустое множество $\emptyset$ содержится в любом другом множестве.

Объединение множеств $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ состоит из элементов, содержащихся или в A, или в B. Пересечение множеств $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ состоит из элементов, содержащихся и в A, и в B. Множество $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$ – дополнение B до A – состоит из тех элементов A, которые не содержатся в B.

Наиболее часто в дальнейшем будут использоваться множества вещественных и комплексных чисел, множества векторов и множества матриц, множества числовых последовательностей и множества функций.

Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Обычно при доказательстве равенства $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ двух множеств проверяются включения: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.

Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, эквивалентны множество комплексных чисел и множество двумерных векторов.

Декартово произведение множеств $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ – это множество пар x, y элементов $x \in \mathrm{X}$ и $y \in \mathrm{Y}$ (порядок их следования в паре фиксирован). Часто рассматриваются произведения одинаковых множеств. Множество векторов, например, является декартовым произведением нескольких множеств чисел.

Пусть X и Y – два множества. Говорят, что задано *отображение* F, действующее из X в Y, если каждому элементу x из некоторого подмножества множества X поставлен в соответствие какой-то элемент $y \in \mathrm{Y}$. Приняты обозначения: $F \;:\; \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ (*отображение действует*) и $F \;:\; x \mapsto y$ (*ставит в соответствие*).

Элементы множества X, участвующие в таком соответствии, образуют *множество определения* отображения F, это множество обозначают $\mathrm{D}(F)$. Соответствующие им элементы множества Y образуют множество значений отображения F, обозначается $\mathrm{R}(F)$. Иными словами, $\mathrm{R}(F) = \{y \in \mathrm{Y} \mid y = F(x),\ x \in \mathrm{D}(F)\}$. Таким образом $F \;:\; \mathrm{D}(F) \to \mathrm{R}(F)$ (*отображение переводит одно множество в другое множество*).

Чаще всего предполагается, что $\mathrm{D}(F) = \mathrm{X}$, но в общем случае это не обязательно. Поэтому при $\mathrm{D}(F) \neq \mathrm{X}$ будем уточнять это так: "отображение F на $\mathrm{D}(F)$".

Вместо слова "отображение" часто используют слово "функция", но обычно в случаях, когда X и Y – множества чисел или векторов, или "оператор" (чаще всего тогда, когда в множествах введены некоторые отношения между элементами и такие множества называют *пространствами*). Если Y – множество чисел, используется термин "функционал" (при этом не существенно, какова природа множества X).

Если $F \;:\; \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, то каждому элементу $y \in \mathrm{R}(F)$ можно поставить в соответствие хотя бы один такой элемент $x \in \mathrm{D}(F)$, что $F \;:\; x \mapsto y$. Поэтому всегда имеется хотя бы одно такое отображение $F_r^{-1} \;:\; \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ на $\mathrm{R}(F)$, что $F(F_r^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \mathrm{R}(F)$. Даже если $F \;:\; x_1 \mapsto y$ и $F \;:\; x_2 \mapsto y$, то при определении F_r^{-1} можно y поставить в соответствие любой из элементов x_1 и x_2. Такое отображение называется *правым обратным* к F на $\mathrm{R}(F)$ отображением. При этом $\mathrm{R}(F_r^{-1}) \subset \mathrm{D}(F)$.

Отображение $F_l^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ на $\mathrm{R}(F)$ называется *левым обратным* к F на $\mathrm{R}(F)$ отображением, если $F_l^{-1}(F(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{D}(F)$. Левое обратное отображение существует тогда и только тогда, когда при отображении F различным элементам X поставлены в соответствие различные элементы Y, то есть соответствие между $\mathrm{D}(F)$ и $\mathrm{R}(F)$ взаимно однозначно. Действительно, если $F(x_1) = y$ и $F(x_2) = y$ при $x_1 \neq x_2$, то невозможно определить отображение F_l^{-1} так, чтобы равенства $(F_l^{-1}(F(x_1)) = x_1$ и $(F_l^{-1}(F(x_2)) = x_2$ выполнялись одновременно.

Если левое обратное отображение существует, то оно определяется однозначно. Легко видеть, что левое обратное отображение будет одновременно и правым обратным отображением. С другой стороны, правое обратное отображение будет одновременно левым обратным только в том случае, если оно единственное. При этом $\mathrm{R}(F_r^{-1}) = \mathrm{D}(F)$. Поэтому при взаимно однозначном соответствии между $\mathrm{D}(F)$ и $\mathrm{R}(F)$ достаточно рассматривать *двустороннее обратное* отображение $F^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ к F на $\mathrm{R}(F)$ (говорят также: *обратное отображение*). Это отображение будет и левым обратным, и правым обратным, причем $\mathrm{D}(F^{-1}) = \mathrm{R}(F), \;\; \mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$.

2. Линейные пространства и линейные операторы

Рассмотрим некоторые базовые понятия линейного функционального анализа.

Вещественным линейным пространством называют непустое множество элементов, для которых определены операции сложения и умножения на вещественное число с привычными алгебраическими свойствами (аксиомами):

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) 0 – такой элемент множества, что $x + 0 = x$;

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

5) $1 \cdot x = x, \;\; 0 \cdot x = x$;

6) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$;
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
Здесь и далее в аналогичных формулах подразумевается, что они выполняются для любых элементов x, y, z и любых чисел λ, μ.

Точно так же определяется *комплексное линейное пространство* или линейное пространство над полем скаляров K.

Пусть X – линейное пространство. Если $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, λ_1, λ_2 – числа, то $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ – *линейная комбинация* элементов x_1, x_2 с коэффициентами λ_1, λ_2. Множество всех возможных линейных комбинаций некоторого набора элементов называют их *линейной оболочкой*.

Непустое множество элементов линейного пространства называют *линейным множеством*, если этому множеству принадлежит каждая линейная комбинация любых его элементов. Линейное множество само является линейным пространством (*подпространством* исходного пространства). Нулевой элемент содержится в любом линейном множестве.

Не равные нулю элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных элементов. Не равные нулю элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства называются *линейно независимыми*, если из $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ следует $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Пусть X и Y – линейные пространства. Отображение A из X в Y называется *линейным оператором*, если 1) $\mathrm{D}(A)$ – линейное множество; 2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \ \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{X}$. Вместо $A(x)$ принято писать просто Ax.

Для линейного оператора A множества $\mathrm{D}(A)$ и $\mathrm{R}(A)$ – линейные. Первое – по определению, а линейность $\mathrm{R}(A)$ легко доказывается. Также линейным множеством является *множество нулей* отображения (или ядро), оно обозначается $\mathrm{N}(A)$ и состоит из элементов $\mathrm{D}(A)$, которые переводятся в нулевой элемент. Ясно, что нулевой элемент X переходит в нулевой элемент Y.

Так как линейное множество $\mathrm{D}(A)$ само является линейным пространством, то часто предполагают, что линейный оператор из X в Y определен на всем пространстве X. Будем считать в дальнейшем, что по умолчанию множества определения всех линейных отображений (функционалов и операторов) совпадают с соответствующими линейными пространствами.

Уточним, как действует линейный оператор $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Соответствие между $\mathrm{D}(A)$ и $\mathrm{R}(A)$ взаимно однозначное тогда и только тогда, когда $\mathrm{N}(A) = \{0\}$. Если $\mathrm{N}(A) \neq \{0\}$, то каждому элементу $\mathrm{R}(A)$ соответствует множество элементов $\mathrm{D}(A)$, разность между которыми принадлежит $\mathrm{N}(A)$.

Для линейного оператора A также всегда можно построить правое обратное отображение A_r^{-1}, но в общем случае не единственным образом. Кроме того, правое отображение не обязательно будет линейным оператором. Если же существует левое обратное отображение для линейного оператора, то оно определяется однозначно и также является линейным оператором.

3. Пространства со скалярным произведением

Вещественное линейное пространство называется *пространством со скалярным произведением*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число $(x,\, y)$ и выполняются следующие условия (аксиомы):
1) $(x,x) \geq 0; \quad (x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $(y,x) = (x,y)$;
3) $(\lambda\, x,y) = \lambda\,(x,y)$;
4) $(x+y,z) = (x,y)+(y,z)$.
Здесь подразумевается, как и при определении линейного пространства, что $x,\ y,\ z$ – любые элементы пространства.

Число $(x,\, y)$ называется *скалярным произведением элементов x и y*.

Если в линейном пространстве X введено скалярное произведение, то фактически задан функционал на декартовом произведении $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$. Этот функционал – билинейный, то есть линейный по аргументу x и линейный по аргументу y.

В комплексном линейном пространстве (x,y) – комплексное число. Аксиома 2) заменяется на
2) $(y,x) = \overline{(x,y)}$;
здесь черта сверху – комплексное сопряжение. Следовательно, в вещественном случае $(x,\lambda\, y) = \lambda\,(x,y)$, но в комплексном $(x,\lambda\, y) = \overline{\lambda}\,(x,y)$. Тем не менее, все-

гда $(x, y+z) = (x, y)+(x, z)$. Скалярное произведение в комплексном линейном пространстве является полуторалинейным функционалом.

Вещественные пространства со скалярным произведением часто называют евклидовыми, а комплексные – унитарными пространствами.

Если $(x, y) = 0$, то элементы x и y называются *ортогональными*, обычно это обозначается $x \perp y$.

Система элементов (не содержащая нулевой элемент) называется *ортогональной*, если $(x_j, x_k) = 0$ при $j \neq k$ и *ортонормированной*, если дополнительно $(x_j, x_j) = 1$ при $j = 1\,..\,n$.

3.1. *Если система элементов ортогональна, то эти элементы линейно независимы.*

Действительно, пусть $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Умножим обе части равенства скалярно на x_k и получим $\lambda_k(x_k, x_k) = 0$. Отсюда следует, что $\lambda_k = 0$ при каждом $k = 1\,..\,n$. •

3.2. *По любой системе линейно независимых элементов можно построить ортогональную систему элементов.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – линейно независимые элементы. Все они ненулевые по определению. Пусть $x_1 = a_1$. Выберем число λ_1 в выражении $x_2 = a_2 - \lambda_1 x_1$ так, чтобы элемент x_2 был ортогонален элементу x_1. Легко видеть, что $\lambda_1 = (a_2, x_1)/(x_1, x_1)$. Выберем числа λ_1 и λ_2 так, чтобы элемент $x_3 = a_3 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$ был ортогонален элементам x_1 и x_2. Ясно, что $\lambda_1 = (a_3, x_1)/(x_1, x_1)$ и $\lambda_2 = (a_3, x_2)/(x_2, x_2)$. И так далее ... На последнем шаге алгоритма, который называют *процесс ортогонализации Шмидта*, получим

$$x_n = a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j, \quad \text{где} \quad \lambda_j = (a_n, x_j)/(x_j, x_j).$$

Отметим, что процесс ортогонализации может быть распространен по индукции и на бесконечное число элементов, а точнее на последовательности элементов. Действительно, пусть по линейно независимым элементам $a_1, \ldots, a_n$ построена система ортогональных элементов $x_1, \ldots, x_n$. Добавим к первой системе элемент a_{n+1}. Тогда

$$x_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad \text{где} \quad \lambda_j = (a_n, x_j)/(x_j, x_j). \;\bullet$$

4. Двойственные пространства и двойственные операторы

Пусть X и X' – линейные пространства. Если на $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ задан некоторый билинейный функционал, то будем говорить, что X и X' – *двойственные пространства.*

Значения функционала на элементах двойственных пространств будем обозначать $< x, x' >$ и будем называть число $< x, x' >$ *бискалярным произведением* элементов $x \in X$ и $x' \in X'$.

В двойственной паре X, X' оба пространства равноправны. Как частный случай, пространство может быть двойственно само себе. Любое вещественное пространство со скалярным произведением двойственно само себе относительно билинейного функционала $< x, x' >= (x, x')$.

Отношение двойственности для пары пространств может быть введено различными способами. Но не все способы равноценны.

Двойственность называется *невырожденной*, если из $< x, x' >= 0 \quad \forall\, x' \in \mathrm{X}'$ следует, что $x = 0$, и из $< x, x' >= 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$ следует, что $x' = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что условие невырожденности всегда выполнено.

Если двойственность невырожденная и $< x_1, x' >=< x_2, x' > \quad \forall\, x' \in \mathrm{X}'$, то $x_1 = x_2$.

Двойственность невырожденна тогда и только тогда, когда $\forall\, x \neq 0 \;\; \exists\, x' | < x, x' >\neq 0$ *и* $\forall x' \neq 0 \;\; \exists\, x \mid \; < x, x' >\neq 0$.

Условие невырожденности в определенном смысле выравнивает свойства двойственных пространств. Можно, например, установить двойственность между пространством векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ и множеством скаляров x' с помощью билинейного функционала $< x, x' >= x_1 x'$. Но такая двойственность, очевидно, не является невырожденной.

Если установлена двойственность между линейными пространствами X и X', то каждому элементу $x' \in \mathrm{X}'$ соответствует определенный на X линейный функционал $x \mapsto < x, x' >$. Каждому элементу $x \in \mathrm{X}$ также соответствует определенный на X' линейный функционал $x' \mapsto < x, x' >$. Очевидно, такие отображения являются линейными. Но любой ли линейный функционал на X действует именно так?

Пусть X, X' и Y, Y' – двойственные пары линейных пространств, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ – линейный оператор. Оператор $A' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ называется *двойственным* к A, если

$$< x, A'y' >=< Ax, y' > \quad \forall\, x \in \mathrm{X}, \;\; \forall\, y' \in \mathrm{Y}'.$$

В дальнейшем будет удобнее иметь дело с линейными операторами $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ и $A' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$, в этом случае условие двойственности имеет вид

$$< x, A'y >=< y, Ax > \quad \forall\, x \in \mathrm{X}, \;\; \forall\, y \in \mathrm{Y}.$$

Если $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ и $A' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}'$, то $< x, A'x' >=< Ax, x' > \;\; \forall\, x \in \mathrm{X}, \; \forall\, x' \in \mathrm{X}'$.

В общем случае оператор, двойственный к линейному оператору, не всегда существует. Действительно, если $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$, то оператор A' определяется следующим образом: элементу $y \in \mathrm{Y}$ ставится в соответствие такой элемент $x' \in \mathrm{X}'$, что $< x, x' >=< y, Ax > \;\; \forall\, x \in \mathrm{X}$. Нет оснований утверждать, что этот элемент x' может быть найден.

Достаточным условием существования двойственного оператора является следующее предположение (дополнительное условие на двойственную пару X, X'): для любого линейного функционала f на X найдется такой элемент $x' \in \mathrm{X}'$, что $< x, x' >= f(x) \;\; \forall\, x \in \mathrm{X}$.

4.1. *Если двойственные операторы существуют, то*

1) $(A + B)' = A' + B'$;

2) $(kA)' = kA'$;

3) $(BA)' = A'B'$;

4) $(A')' = A$;

5) $I' = I \quad (I$ *– тождественный оператор*$)$.

Доказательство. Пусть A и B – линейные операторы из X в Y'. Пусть существуют двойственные операторы A' и B', при этом выполняются тождества $< x, A'y >=< y, Ax >$ и $< x, B'y >=< y, Bx > \quad \forall x \in \mathrm{X},\ \forall y \in \mathrm{Y}$. Отсюда следует, что $< x, (A' + B')y >=< y, (A + B)x >$. Тогда $A' + B'$ – оператор, двойственный к линейному оператору $A + B$.

Аналогично доказываются остальные равенства. Например, пусть $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$, $A' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ и $B : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Z}$, $B' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Y}$ – две пары двойственных операторов, при этом $< x, A'y >=< y, Ax >$ и $< By', z' >=< B'z', y' >$. Тогда $< x, A'B'z' >=< B'z', Ax >=< BAx, z' >$, то есть оператор $A'B' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{X}'$ является двойственным к оператору $BA : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$.

В последнем равенстве подразумевается, что $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{X}'$ и $I : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. •

4.2. *Пусть* $\mathrm{X} = \mathrm{X}' = \mathrm{Y} = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}([a, b])$, *и отношение двойственности задано с помощью интегрального билинейного функционала*

$$< x, x' >= \int_a^b x(t)x'(t)\,dt.$$

Если $k(\tau, t)$ *– непрерывная функция, то*

$$A : x(t) \mapsto x(t) + \int_a^b x(\tau)\,k(\tau, t)\,d\tau \quad \text{и} \quad A' : y(t) \mapsto y(t) + \int_a^b y(\tau)\,k(t, \tau)\,d\tau$$

– двойственные операторы.

Действительно,

$$< x, A'y >= \int_a^b x(t) \left(y(t) + \int_a^b y(\tau)\,k(t, \tau)\,d\tau \right) dt =$$

$$= \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt + \int_a^b y(\tau) \left(\int_a^b x(t)\,k(t, \tau)\,dt \right) d\tau$$

и, если переставить местами переменные t и τ во втором слагаемом,

$$< x, A'y >= \int_a^b y(t) \left(x(t) + \int_a^b x(\tau)\,k(\tau, t)\,d\tau \right) dt =< y, Ax > . \quad \bullet$$

В более общем случае двойственной парой относительно билинейного интегрального функционала будет также любая пара пространств функций, произведение элементов которых интегрируемо.

5. Конечномерные пространства и конечномерные операторы

Базисом линейного множества называют такую систему линейно независимых элементов, что любой элемент множества является их линейной комбинацией. Если в базисе содержится конечное число элементов, то линейное множество или линейное пространство называют *конечномерным.*

Линейное пространство R^n, состоящее из n-мерных векторов, является, очевидно, n-мерным линейным пространством. В качестве базиса удобно взять векторы $e^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e^2 = 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$ $e^n = (0, \ldots, 0, 1)$. Любой элемент R^n есть линейная комбинация этих векторов. Коэффициенты разложения вектора по такому базису равны его компонентам. Но можно выбрать и другой базис в R^n.

Легко установить взаимно однозначное соответствие между любым n-мерным линейным пространством X и пространством R^n. Если $x_1, \ldots, x_n$ – базис в X, то любому элементу x соответствует вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, составленный из коэффициентов разложения x по базису.

Линейные пространства называются *изоморфными*, если они эквивалентны и взаимно однозначное соответствие между их элементами согласовано с линейными операциями. Следовательно, любое n-мерное линейное пространство изоморфно пространству R^n.

5.1. *Каждое конечномерное пространство имеет двойственное пространство.*

Действительно, если X – n-мерное линейное пространство и X$'$ – также n-мерное линейное пространство, то можно определить бискалярное произведение как скалярное произведение векторов из коэффициентов разложений по базисам:

$$< x, x' >= (\lambda, \lambda') = \lambda_1 \lambda'_1 + \ldots \lambda_n \lambda'_n. \bullet$$

Таким образом, взаимно двойственны любые конечномерные пространства одной и той же размерности. Как частный случай, конечномерное пространство двойственно само себе.

Уточним, каким может быть линейное пространство, двойственное к конечномерному пространству. Предположим, что X – n-мерное линейное пространство и X' – двойственное пространство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – базис в X и

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j.$$

Тогда бискалярное произведение

$$< x, x' >= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; < x_j, x' >,$$

и элемент x' двойственного пространства (а также любой линейный функционал на X) можно отождествить с числами $\lambda_j' =< x_j, x' >$ – бискалярными произведениями элементов базиса в X и элемента x' (значениями функционала на элементах базиса). Поэтому X' – также конечномерное пространство размерности n.

Пусть X, X' и Y, Y' – пары двойственных пространств.

Линейный оператор $K \; : \; \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ назовем *конечномерным*, если в X' и Y' найдутся такие системы линейно независимых элементов $x_1', \ldots, x_n'$ и $y_1', \ldots, y_n'$, что

$$K \; : \; x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x_j' > \; y_j' \quad \forall \, x \in \mathrm{X}.$$

Из определения следует, что у конечномерного оператора K область значений $\mathrm{R}(K)$ – конечномерное множество. Обратное утверждение в общем случае не имеет места. Действительно, пусть $A \; : \; \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – линейный оператор с конечномерной областью значений. Если $y_1', \ldots, y_n'$ – базис $\mathrm{R}(A)$, то образ любого элемента x можно разложить по этому базису:

$$A \; : \; x \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \, y_j',$$

где $a_j(x)$ – некоторые линейные функционалы. Оператор A будет конечномерным (в смысле данного выше определения), если $\forall\, j = 1\,..\,n \quad \exists\, x'_j \in \mathrm{X}' \mid a_j(x) =< x, x'_j > \ \forall\, x \in \mathrm{X}$.

5.2. *Каждый конечномерный линейный оператор имеет двойственный.*

Действительно, оператор

$$K' \,:\, y \mapsto \sum_{j=1}^{n} < y, y'_j > \, x'_j \quad \forall y \in \mathrm{Y}$$

является двойственным к оператору K. Легко проверить, что

$$< y, Kx >=< y, \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > \, y'_j >= \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j >< y, y'_j >=$$

$$=< x, \sum_{j=1}^{n} < y, y'_j > \, x'_j >=< x, K'y > . \quad \bullet$$

В частном случае, если $\mathrm{Y}' = \mathrm{X}$ и $\mathrm{Y} = \mathrm{X}'$, то двойственными будут конечномерные операторы

$$T \,:\, x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > \, x_j, \qquad\qquad T' \,:\, x' \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x_j, x' > \, x'_j$$

(здесь системы линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$ и $x'_1, \ldots, x'_n$ никак не связаны друг с другом).

Ясно, что сумма конечномерных операторов также является конечномерным оператором. Рассмотрим теперь композиции конечномерных и линейных операторов.

5.3. *Пусть K – конечномерный оператор, A_1 – линейный оператор и A_2 – линейный оператор, имеющий двойственный. Тогда A_1K и KA_2 – конечномерные операторы.*

Доказательство. Пусть

$$K \,:\, x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > \, y'_j,$$

здесь $x'_j,\ y'_j$ – линейно независимые элементы пространств X' и Y'.

Если $A_1\ :\ \mathrm{Y}' \to \mathrm{Z}$ – линейный оператор, то, легко видеть,

$$A_1K\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j >\ A_1 y'_j$$

– конечномерный оператор из X в Z.

Если $A_2\ :\ \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ – линейный оператор, имеющий двойственный, то

$$KA_2\ :\ z \mapsto \sum_{j=1}^{n} < A_2 z, x'_j >\ y'_j = \sum_{j=1}^{n} < z, A'_2 x'_j >\ y'_j$$

– тоже конечномерный оператор из Z в Y'. •

6. Проекторы. Разложения пространств в прямые суммы

Линейный оператор $P\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ называется *проектором*, если $P^2 = P$ (т. е. $P^2 x = Px\ \ \forall x \in \mathrm{X}$).

Пусть M_1 и M_2 – линейные множества (подпространства) в X. Если $\mathrm{M}_1{+}\mathrm{M}_2 = \mathrm{X}$ и $\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2 = \{0\}$, то говорят, что X является *прямой суммой* множеств M_1 и M_2. Будем это обозначать так: $\mathrm{X} = \mathrm{M}_1 \dot{+} \mathrm{M}_2$. Множество M_2 называют прямым дополнением множества M_1 в X, и наоборот.

6.1. *Если* $P\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – *проектор, то* $\mathrm{X} = \mathrm{R}(P)\dot{+}\mathrm{N}(P)$.

Действительно, пусть $x \in \mathrm{X}$. Обозначим $\check{x} = Px$ и $\hat{x} = x - Px$. По построению $x = \check{x} + \hat{x}$, причем $\check{x} \in \mathrm{R}(P)$ и $\hat{x} \in \mathrm{N}(P)$. Если одновременно $x \in \mathrm{R}(P)$ и $x \in \mathrm{N}(P)$, то $\exists\ x_0 \mid x = Px_0$. Но тогда $x = P^2 x_0 = Px{=}0$. Следовательно, $x = 0$ и $\mathrm{R}(P) \cap \mathrm{N}(P) = \{0\}$. •

В дальнейшем часто будем пользоваться разложениями вида $x = \check{x} + \hat{x}$, а также следующими фактами. Если одновременно $x \in \mathrm{R}(P)$ и $x \in \mathrm{N}(P)$, то $x = 0$. Если $\mathrm{X} = \mathrm{M}_1 \dot{+} \mathrm{M}_2,\ x_1 \in \mathrm{M}_1,\ x_2 \in \mathrm{M}_2$ и $x_1 + x_2 = 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Проектором является и оператор $I - P$, который называют *дополнительным проектором* по отношению к P. Легко видеть, что $\mathrm{R}(I-P) = \mathrm{N}(P)$ и $\mathrm{N}(I-P) = \mathrm{R}(P)$. Поэтому разложение линейного пространства X в прямую сумму можно также записать в виде $\mathrm{X} = \mathrm{N}(I-P)\dot{+}\mathrm{R}(I-P)$.

6.2. *Если проектор $P : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ имеет двойственный оператор $P' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}'$, то P' – проектор.*

Доказательство. Пусть $x' \in \mathrm{X}'$. Тогда $\forall x \in \mathrm{X}$

$$< x, P'x' >=< Px, x' >=< P^2x, x' >=< Px, P'x' >=< x, (P')^2x' > .$$

Из условия тотальности следует, что $(P')^2x' = P'x'$. •

Пусть X и X' – двойственные пространства. Элементы $x \in \mathrm{X}$ и $x' \in \mathrm{X}'$ называются *биортогональными*, если $< x, x' >= 0$. Системы ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{X}$ и $x'_1, \ldots, x'_n \in \mathrm{X}'$ называются *биортонормированными*, если $< x_j, x'_k >= \delta_{jk},\ \ j, k = 1\,..\,n$ (δ_{jk} – символ Кронекера).

Легко видеть, что в каждой из биортонормированных систем элементы являются линейно независимыми. Действительно, предположим, что $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Тогда $< x, x'_k >= \lambda_k = 0\ \ \forall\, k = 1\,..\,n$. •

6.3. *Если $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{X}$ и $x'_1, \ldots, x'_n \in \mathrm{X}'$ – биортонормированные системы элементов, то операторы*

$$P\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j >\ x_j, \qquad\qquad P'\ :\ x' \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x_j, x' >\ x'_j$$

– двойственные конечномерные проекторы.

Доказательство. По построению $P\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ и $P'\ :\ \mathrm{X}' \to \mathrm{X}'$ – линейные конечномерные двойственные операторы. Двойственность их очевидна:

$$< x, P'x' >= \sum_{j=1}^{n} < x_j, x' >< x, x'_j >=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j >< x_j, x' >=< Px, x' > .$$

Также легко видеть, что, например, $Px_k = x_k\ \ \ \forall\, k = 1\,..\,n$. Следовательно, $P^2x = Px\ \ \forall\, x \in \mathrm{X}$. •

Таким образом, биортонормированные системы элементов в двойственных пространствах порождают пару двойственных конечномерных проекторов. При этом

6.4. *Пусть P – конечномерный проектор. Если $x \in N(P)$, то $< x, x'_j >= 0 \ \forall j = 1..n$.*

Доказательство. Если

$$\sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > \ x_j = 0,$$

то из линейной независимости x_j следует, что $< x, x'_j >= 0 \ \forall j = 1..n$. •

6.5. *По системе линейно независимых элементов в одном из двойственных пространств можно построить в них биортонормированные системы элементов.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – линейно независимые элементы пространства X.

При $n = 1$ положим $x_1 = a_1$. Так как $x_1 \neq 0$, то $\exists x' \in \mathrm{X}' \mid \ < x_1, x' > \neq 0$ (в силу невырожденности билинейной формы). Тогда $x'_1 = x'/ < x_1, x' >$.

Предположим, что по элементам $a_1, \ldots, a_{n-1}$ построены биортонормированные системы элементов $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ и порождаемые ими проекторы P и P'. По новому элементу a_n построим элемент $\hat{a} = a_n - Pa_n \in \mathrm{N}(P)$. В силу утверждения 6.4 имеем $< \hat{a}, x'_j >= 0 \ \forall j = 1 \,..\, n-1$. При этом $\hat{a} \neq 0$, иначе элемент a_n был бы линейно зависим с элементами $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Тогда $\exists b' \in \mathrm{X}' \mid \ < \hat{a}, b' > \neq 0$. Элемент $\hat{b'} = b' - P'b' \in \mathrm{N}(P')$. В силу 6.4 $< x_j, \hat{b'} >= 0 \ \forall j = 1 \,..\, n-1$. При этом

$$< \hat{a}, \hat{b'} >=< \hat{a}, b' - \sum_{j=1}^{n-1} < x_j, b' > \ x'_j >=< \hat{a}, b' > \neq 0.$$

Положим $x_n = \hat{a}$ и $x'_n = \hat{b'}/ < \hat{a}, b' >$. •

Итак, чтобы в линейном пространстве построить проектор, достаточно задать конечную систему линейно независимых элементов этого пространства, а затем построить по ней биортонормированные системы элементов в двойственной паре пространств. Биортонормированные системы порождают даже два проектора – в исходном пространстве и в двойственном ему. Следовательно, каждое конечномерное подпространство линейного пространства дополняемо.

7. Аннуляторы. Бизамкнутые множества

Пусть X, X' – двойственные линейные пространства. С помощью равенства $< x, x' >= 0$ определяются аннуляторы – множества, биортогональные друг другу.

Если $\mathrm{M} \subset \mathrm{X}$, то *аннулятор множества* M

$$\mathrm{M}^{\perp} = \{x' \in \mathrm{X}' \mid \ < x, x' >= 0 \ \ \forall x \in \mathrm{M}\} \subset \mathrm{X}'.$$

Если $\mathrm{M}' \subset \mathrm{X}'$, то *аннулятор множества* M′

$$^{\perp}\mathrm{M}' = \{x \in \mathrm{X} \mid \ < x, x' >= 0 \ \ \forall x' \in \mathrm{M}'\} \subset \mathrm{X}.$$

Знак $^{\perp}$ ставится слева или справа для того, чтобы дополнительно указать на пространство, которому принадлежит аннулятор – основному или двойственному.

Очевидно, что аннуляторы – линейные множества.

7.1.

1) *Если* $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}_2$, *то* $\mathrm{M}_2^{\perp} \subset \mathrm{M}_1^{\perp}$; *если* $\mathrm{M}_1' \subset \mathrm{M}_2'$, *то* $^{\perp}\mathrm{M}_2' \subset {}^{\perp}\mathrm{M}_1'$;
2) $(\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2)^{\perp} = (\mathrm{M}_1^{\perp}) \cap (\mathrm{M}_2^{\perp})$; $\ ^{\perp}(\mathrm{M}_1' \cup \mathrm{M}_2') = ({}^{\perp}\mathrm{M}_1') \cap ({}^{\perp}\mathrm{M}_2')$;
3) $\mathrm{M} \subset {}^{\perp}(\mathrm{M}^{\perp})$ и $\mathrm{M}' \subset ({}^{\perp}\mathrm{M}')^{\perp}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только множества в пространстве X.

Первое утверждение. Если $x' \in \mathrm{M}_2^{\perp}$, то $< x, x' >= 0 \ \ \forall x \in \mathrm{M}_2$ и, следовательно, $\forall x \in \mathrm{M}_1$. Тогда $x \in \mathrm{M}_1^{\perp}$.

Второе утверждение. Если $x' \in (\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2)^{\perp}$, то $< x, x' >= 0 \ \ \forall x \in \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2$. Следовательно, $\forall x \in \mathrm{M}_1$ и $\forall x \in \mathrm{M}_2$. Тогда $x' \in \mathrm{M}_1^{\perp}, \ x' \in \mathrm{M}_2^{\perp}$ и $x' \in (\mathrm{M}_1^{\perp}) \cap (\mathrm{M}_2^{\perp})$. Обратное включение проверяется аналогично.

Третье утверждение очевидно. Действительно, если $x \in \mathrm{M}$, то $< x, x' >= 0 \ \ \forall x' \in \mathrm{M}^{\perp}$. Но тогда $x \in {}^{\perp}(\mathrm{M}^{\perp})$. $\bullet$

Назовем множество $[\mathrm{M}] = {}^{\perp}(\mathrm{M}^{\perp})$ *бизамыканием* множества M в X. Множество M назовем *бизамкнутым*, если $[\mathrm{M}] = \mathrm{M}$. Как уже было установлено, $\mathrm{M} \subset [\mathrm{M}]$.

Непосредственно из определений следует, что $[\mathrm{M}]^{\perp} = [\mathrm{M}^{\perp}]$ (*аннулятор бизамыкания равен бизамыканию аннулятора*), так как оба множества в равенстве – не что иное, как $({}^{\perp}(\mathrm{M}^{\perp}))^{\perp}$. Отсюда легко получить, что аннулятор бизамкнутого множества – множество бизамкнутое. Действительно, если $[\mathrm{M}] = \mathrm{M}$, то $[\mathrm{M}]^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp}$, но $[\mathrm{M}]^{\perp} = [\mathrm{M}^{\perp}]$. Имеет место и более общее утверждение.

7.2. *Каждый аннулятор – бизамкнутое множество.*

Доказательство. Так как $\mathrm{M} \subset [\mathrm{M}]$, то $[\mathrm{M}]^{\perp} \subset \mathrm{M}^{\perp}$ и, следовательно, $[\mathrm{M}^{\perp}] \subset \mathrm{M}^{\perp}$. Но в то же время $\mathrm{M}^{\perp} \subset [\mathrm{M}^{\perp}]$. Поэтому $\mathrm{M}^{\perp} = [\mathrm{M}^{\perp}]$. •

Пусть X, X' и Y, Y' – пары двойственных линейных пространств, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – линейный оператор, и существует двойственный к нему линейный оператор $A' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$. Пусть также $\mathrm{D}(A) = \mathrm{X},\ \mathrm{D}(A') = \mathrm{Y}$.

7.3. $\mathrm{N}(A) = {}^{\perp}\mathrm{R}(A')$ *и* $\mathrm{N}(A') = {}^{\perp}\mathrm{R}(A)$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{N}(A) = {}^{\perp}\mathrm{R}(A')$.

Если $x \in \mathrm{N}(A)$, то $Ax = 0$. Тогда $< y, Ax >= 0 \ \ \forall\, y \in \mathrm{Y}$. Следовательно, $< x, A'y >= 0$ и $x \in {}^{\perp}\mathrm{R}(A')$ Обратная цепочка рассуждений также имеет место. Пусть $x \in {}^{\perp}\mathrm{R}(A')$. Тогда $< x, x' >= 0 \ \ \forall x' \in \mathrm{R}(A')$ и $< x, A'y >= 0 \ \ \forall y \in \mathrm{D}(A') = \mathrm{Y}$. Поэтому $< y, Ax >= 0 \ \ \forall y \in \mathrm{Y}$ и $Ax = 0$. Второе равенство доказывается аналогично.

Существенно, что двойственность невырожденная; иначе из $< y, Ax >= 0 \ \ \forall\, y \in \mathrm{Y}$ не следует, что $Ax = 0$. •

Легко видеть, что $\mathrm{N}(A')^{\perp} = [\mathrm{R}(A)]$ и $\mathrm{N}(A)^{\perp} = [\mathrm{R}(A')]$. Следовательно, $\mathrm{R}(A) \subset \mathrm{N}(A')^{\perp}$ и $\mathrm{R}(A') \subset \mathrm{N}(A)^{\perp}$.

В конечномерном случае (например, для двойственных конечномерных операторов K и K') не нужно предполагать, что двойственность невырожденная. Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > \ y_j = 0$$

тогда и только тогда, когда $< x, x'_j >= 0,\ j = 1\,..\,n$. Это значит, что x принадлежит аннулятору линейной оболочки элементов $x'_1, \ldots, x'_n$.

Для двойственных проекторов $\mathrm{N}(P) = {}^{\perp}\mathrm{R}(P')$, $\mathrm{N}(P') = \mathrm{R}(P)^{\perp}$. Следовательно, если имеется пара двойственных проекторов, то разложения в прямые суммы соответствующих линейных пространств можно записать в виде $\mathrm{X} = \mathrm{R}(P)\dot{+}{}^{\perp}\mathrm{R}(P')$ и $\mathrm{X}' = \mathrm{R}(P')\dot{+}\mathrm{R}(P')^{\perp}$.

Таким образом, если в пространстве X задано конечномерное линейное множество M, то в двойственном пространстве X' можно построить два прямо дополняющих друг друга множества – аннулятор M и линейную оболочку элементов, биортонормированных с базисом в M.

Доказывать, что множество бизамкнуто, не всегда просто. В некоторых случаях достаточно воспользоваться следующим утверждением.

7.4. *Если проектор* $P : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *имеет двойственный оператор* $P' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}'$, *то множества* $\mathrm{R}(P)$, $\mathrm{N}(P)$, $\mathrm{R}(P')$, $\mathrm{N}(P')$ *и их аннуляторы бизамкнуты.*

Доказательство.

Докажем, что множество $\mathrm{R}(P)$ бизамкнуто. Как известно, $\mathrm{R}(P) \subset {}^{\perp}(\mathrm{R}(P)^{\perp})$. Получим обратное включение.

Пусть $x \in {}^{\perp}(\mathrm{R}(P)^{\perp})$. Представим этот элемент в виде суммы: $x = \check{x} + \hat{x}$, где $\check{x} = Px \in \mathrm{R}(P) \subset {}^{\perp}(\mathrm{R}(P)^{\perp})$ и $\hat{x} = x - Px \in \mathrm{N}(P) = {}^{\perp}\mathrm{R}(P')$ (см. 7.3). Кроме того, $\hat{x} = x - \check{x} \in {}^{\perp}(\mathrm{R}(P)^{\perp})$.

Предположим, что $\hat{x} \neq 0$. В силу условия невырожденности в X' найдется такой элемент x', что $< \hat{x}, x' > \neq 0$.

Элемент x' также запишем как сумму: $x' = \check{x}' + \hat{x}'$. Здесь $\check{x}' = P'x' \in \mathrm{R}(P')$ и, следовательно, $< \hat{x}, \check{x}' >= 0$. С другой стороны, $\hat{x}' = x' - P'x' \in \mathrm{N}(P') = \mathrm{R}(P)^{\perp}$ (см. 7.3) и $< \hat{x}, \hat{x}' >= 0$. Тогда $< \hat{x}, x' >=< \hat{x}, \check{x}' > + < \hat{x}, \hat{x}' >= 0$. Пришли к противоречию. Поэтому $\hat{x} = 0$, а тогда $x = \check{x} + \hat{x} \in \mathrm{R}(P)$.

Точно таким же образом доказывается, что множество $\mathrm{R}(P')$ бизамкнуто. Далее, проектор $I - P$ также имеет двойственный проектор. Поэтому множество $\mathrm{N}(P) = \mathrm{R}(I - P)$ бизамкнуто (или потому, что $\mathrm{N}(P) = {}^{\perp}\mathrm{R}(P')$). По той же причине и $\mathrm{N}(P')$ является бизамкнутым множеством. Наконец, аннуляторы рассматриваемых множеств – бизамкнутые множества (см. 7.2). •

7.5. *Конечномерное линейное множество и его прямое дополнение бизамкнуты.*

Это утверждение – простое следствие предыдущего, поскольку конечномерное множество всегда можно рассматривать как область значений соответствующего конечномерного проектора, а он имеет двойственный оператор. •

Глава 2. Операторы Нетера

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – объекты, очень часто встречающиеся в математических задачах. Существование и единственность решения той или иной задачи часто зависит от свойств матрицы коэффициентов соответствующей линейной системы. К решению СЛАУ сводятся многие задачи вычислительной математики.

Естественным обобщением на более абстрактный уровень теории систем линейных алгебраических уравнений является теория линейных операторов, действующих в линейных пространствах, как конечномерных, так и бесконечномерных. Классический пример – теория линейных интегральных уравнений. Теория операторов Нетера возникла при исследовании картины разрешимости сингулярных интегральных уравнений и, как частный случай, интегральных уравнений Фредгольма.

8. Нормальная разрешимость. Операторы Нетера

Оператор $A\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ назовем *нормально разрешимым*, если множество $\mathrm{R}(A)$ бизамкнуто.

Если существует двойственный оператор A', то можно использовать равносильные определения нормальной разрешимости:

если $\mathrm{R}(A) = \mathrm{N}(A')^{\perp}$;

если $y' \in \mathrm{R}(A)$ тогда и только тогда, когда $< y, y' >= 0\ \ \forall y \in \mathrm{N}(A')$;

если уравнение $Ax = y'$ имеет решение тогда и только тогда, когда $< y, y' >= 0\ \ \forall y \mid A'y = 0$.

Оператор A назовем *оператором Нетера* (нетеровым), если он нормально разрешим и множества $\mathrm{N}(A)$, ${}^{\perp}\mathrm{R}(A)$ – конечномерные.

Бизамкнутость $\mathrm{R}(A)$ и конечномерность ${}^{\perp}\mathrm{R}(A)$ сводятся к следующему. Если $y_1, \dots y_\beta$ – базис ${}^{\perp}\mathrm{R}(A)$, то $y' \in \mathrm{R}(A)$ тогда и только тогда, когда $< y_j, y' >= 0 \ \ \forall j = 1\,..\,\beta$.

Величины $\alpha(A) = \dim \mathrm{N}(A)$ и $\beta(A) = \dim {}^{\perp}\mathrm{R}(A)$ будем называть *размерностями* оператора A (их называют также дефектными числами, а составленную из них пару – дефектной характеристикой A). Число $\varkappa(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ – *индекс* оператора A.

Оператор называется полунетеровым, если только одна из его размерностей является конечной.

Оператор Нетера с нулевым индексом называют *оператором Фредгольма*.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Очевидно, что *тождественный оператор* $I\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – *оператор Фредгольма* с нулевыми размерностями: $\mathrm{N}(I) = \{0\}$, $\mathrm{R}(I)^{\perp} = \mathrm{X}^{\perp} = \{0\}$ и $\mathrm{R}(I) = \mathrm{X}$ – бизамкнутое множество.

Нулевой оператор ($x \mapsto 0 \ \ \forall x \in X$) не является оператором Нетера.

2. Любой *обратимый на Y' оператор* также *фредгольмов*, так как он устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y'.

8.1. *Линейный оператор, действующий в конечномерных пространствах, нетеров.*

Покажем, что линейное операторное уравнение в конечномерных пространствах всегда может быть записано как система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Действительно, пусть $A\ :\ \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – линейный оператор, элементы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в X, элементы $y'_1, \dots, y'_m$ образуют базис в Y'. Если элементы этих конечномерных пространств отождествить с коэффициентами их разложений по базисам

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j, \qquad y' = \sum_{k=1}^{m} \mu_k\, y'_k,$$

то

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, Ax_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \, y'_k = \sum_{k=1}^{m} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \, \lambda_j \Bigr) \, y'_k,$$

здесь числа a_{jk} – коэффициенты разложения элементов Ax_j в базисе пространства Y'. Поэтому уравнение $Ax = y'$ равносильно СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \, \lambda_j = \mu_k, \quad k = 1 \,..\, m.$$

Эта система уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k \, \mu_k = 0$$

для всех наборов чисел $\nu_k, \;\; k = 1 \,..\, m,$ – решений СЛАУ с транспонированной матрицей

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk} \, \nu_k = 0, \quad j = 1 \,..\, n.$$

Пусть $x'_1, \ldots, x'_n$ – базис в X', $y_1, \ldots, y_m$ – базис в Y и

$$y = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \, y_k.$$

Тогда оператор

$$A' \; : \; y \mapsto \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{k=1}^{m} a_{jk} \, \nu_k \Bigr) \, x'_j$$

является оператором, двойственным к A. Легко видеть, что

$$< x, A'y > = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \, \nu_k = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \, \lambda_j = < y, Ax > .$$

Отсюда следует, что $\mathrm{R}(A) = \mathrm{N}(A')^{\perp}$, а тогда $\mathrm{R}(A)$ – бизамкнутое множество. Кроме того, $\alpha(A) \le n$ и $\beta(A) \le m$. Точнее, размерности оператора равны числу линейно независимых нетривиальных решений соответствующих однородных СЛАУ. •

Заметим, что конечномерный оператор, действующий в бесконечномерных пространствах, не обязательно нетеров. Например, если соответствующая сумма состоит только из одного слагаемого,

$$A \; : \; x \mapsto < x, x' > \; y',$$

то в аннуляторе элемента x' может содержаться так много элементов, что $\mathrm{N}(A)$ будет бесконечномерным множеством.

9. Канонические операторы Фредгольма

Как уже было сказано, операторы Фредгольма – частный случай операторов Нетера. Линейный оператор, действующий в конечномерных пространствах, будет оператором Фредгольма, если равны числа линейно независимых решений у соответствующих двойственных СЛАУ. Примеры фредгольмовых операторов в бесконечномерных пространствах дает следующее утверждение.

9.1. *Если $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – конечномерный оператор, то операторы $I - T$ и $I - T'$ – операторы Фредгольма.*

Доказательство. Пусть

$$T : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > x_j, \qquad T' : x' \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x_j, x' > x'_j$$

(здесь элементы $x_1, \ldots, x_n$ и $x'_1, \ldots, x'_n$ – линейно независимые, но они не обязательно образуют биортонормированные системы элементов). Предположим, что $z \in {}^{\perp}(\mathrm{R}(I - T)^{\perp}) = {}^{\perp}\mathrm{N}(I - T')$. Покажем, что $z \in \mathrm{R}(I - T)$, т. е. уравнение $x - Tx = z$ или

$$x - \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j > x_j = z$$

имеет решение.

Это уравнение равносильно СЛАУ

$$a_k - \sum_{j=1}^{n} < x_j, x'_k > a_j = b_k, \quad k = 1\,..\,n,$$

где $a_j =< x, x'_j >$ и $b_k =< z, x'_k >$. В самом деле, поступим подобно тому, как это делается при исследовании интегральных уравнений с вырожденными ядрами. Перепишем уравнение так:

$$x = z + \sum_{j=1}^{n} a, x_j/$$

Отсюда, если умножить обе части равенства бискалярно на x'_k, то

$$a_k =< z, x'_k > + \sum_{j=1}^{n} < x_j, x'_k > a_j.$$

Точно таким же способом однородное двойственное уравнение $x' - T'x' = 0$ сводится к СЛАУ

$$c_k - \sum_{j=1}^{n} < x_k, x'_j > c_j = 0, \quad k = 1 \ldots n,$$

где $c_j =< x_j, x' >$. У рассматриваемых СЛАУ матрицы транспонированы по отношению друг к другу.

Если $z \in {}^{\perp}\mathrm{N}(I - T')$, то $< z, x' >= 0$ для всех x', удовлетворяющих однородному двойственному уравнению. Так как $x' = T'x'$, то $< z, T'x' >= 0$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} < x_j, x' >< z, x'_j >= 0 \;\text{ или }\; \sum_{j=1}^{n} c_j\, b_j = 0.$$

Поэтому первая неоднородная СЛАУ имеет решение, и уравнение $x - Tx = z$ – тоже.

Кроме того, $\dim \mathrm{N}(I - T) = \dim \mathrm{N}(I - T') = \dim \mathrm{R}(I - T)^{\perp}$. •

Будем называть операторы вида $I - T$ и $I - T'$, где $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – конечномерный оператор, *каноническими операторами Фредгольма.*

Отметим, что в конечномерных пространствах операторы $I - T$ и $I - T'$ – обычные конечномерные операторы. Существенное различие между T и $I - T$ проявляется только в бесконечномерном случае.

10. Соответствие между элементами пространств

Пусть $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – оператор Нетера. Исследуем, какое соответствие он устанавливает между элементами пространств X и Y'.

Так как множества $\mathrm{N}(A)$ и ${}^{\perp}\mathrm{R}(A)$ – конечномерные, то можно построить конечномерные проекторы в пространствах X, X', Y, Y' и с их помощью разложить эти пространства в прямые суммы.

Пусть $x_1, \dots, x_\alpha$ – базис линейного множества $\mathrm{N}(A)$. По $x_1, \dots, x_\alpha$ построим элементы $x'_1, \dots, x'_\alpha$ в X' так, чтобы иметь в пространствах X и X' пару биортонормированных систем элементов. Тогда

$$P \,:\, x \mapsto \sum_{j=1}^{\alpha} < x, x'_j > \, x_j, \qquad\qquad P' \,:\, x' \mapsto \sum_{j=1}^{\alpha} < x_j, x' > \, x'_j$$

– двойственные конечномерные проекторы, P – в пространстве X с множеством значений $\mathrm{R}(P) = \mathrm{N}(A)$. Следовательно, пространство X разлагается в прямую сумму $\mathrm{N}(A) \dot{+} \mathrm{N}(P)$.

Аналогично, пусть $y_1, \dots, y_\beta$ – базис множества ${}^\perp\mathrm{R}(A)$ и $y'_1, \dots, y'_\beta$ – биортонормированные системы элементов в пространствах Y и Y'. Тогда

$$Q \,:\, y \mapsto \sum_{j=1}^{\beta} < y, y'_j > \, y_j, \qquad\qquad Q' \,:\, y' \mapsto \sum_{j=1}^{\beta} < y_j, y' > \, y'_j$$

– также двойственные проекторы: Q – в пространстве Y с множеством значений $\mathrm{R}(Q) = {}^\perp\mathrm{R}(A)$ и Q' – в пространстве Y'. При этом пространство Y' разлагается в прямую сумму $\mathrm{Y}' = \mathrm{R}(Q') \dot{+} \mathrm{N}(Q')$. Но $\mathrm{N}(Q') = \mathrm{R}(Q)^\perp = ({}^\perp\mathrm{R}(A))^\perp$ и, так как множество $\mathrm{R}(A)$ бизамкнуто, $\mathrm{N}(Q') = \mathrm{R}(A)$.

На рис. 1 разложения пространств X и Y' в прямые суммы условно показаны как разложения плоскостей в суммы двух ортогональных прямых.

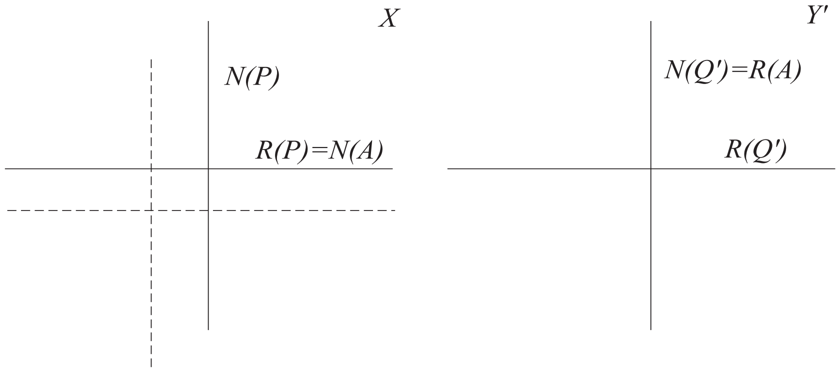

Рис. 10.1. Схема действия нетерова оператора

При отображении A элементы $x \in \mathrm{X}$ переходят в элементы множества $\mathrm{R}(A)$. Каждый элемент x является суммой двух других элементов, один принадлежит

$\mathrm{N}(P)$, а второй – $\mathrm{N}(A)$. Так как каждый элемент множества $\mathrm{N}(A)$ переводится в нулевой элемент пространства Y', то множество $\mathrm{R}(A)$ состоит из образов элементов $\mathrm{N}(P)$. При этом для любого элемента $\mathrm{R}(A)$ найдется прообраз в $\mathrm{N}(P)$. Этот прообраз – единственный. Действительно, если x_1 и x_2 из $\mathrm{N}(P)$ переходят в один и тот же элемент $y' \in \mathrm{R}(A)$, то их разность $x_1 - x_2$ принадлежит и $\mathrm{N}(A)$, и $\mathrm{N}(P)$. Тогда $x_1 - x_2 = 0$. Таким образом, имеет место следующее важное утверждение.

10.1. *Сужение* $A_{\mathrm{N}(P)}$ *оператора* A *на* $\mathrm{N}(P)$ *устанавливает взаимно однозначное соответствие между* $\mathrm{N}(P)$ и $\mathrm{R}(A)$ *и, следовательно, имеет Обратный оператор на* $\mathrm{R}(A)$.

Еще раз обратимся к схеме, изображенной на рис. 10.1. Каждая вертикальная прямая из X переходит в $\mathrm{R}(A)$, а каждая горизонтальная – в один элемент $\mathrm{R}(A)$ (причем прямая $\mathrm{N}(A)$ – в нулевой элемент).

Аналогичное утверждение можно получить и для оператора, двойственного к нетеровому, если только двойственный оператор существует.

11. Характеристические операторы Нетера

Операторы Нетера, у которых одна из размерностей равна нулю, называются *характеристическими.*

Пусть $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – линейный оператор, в частном случае – нетеров. Условие $\alpha(A) = \dim \mathrm{N}(A) = 0$ равносильно тому, что $\mathrm{N}(A) = \{0\}$ (или оператор A имеет левый обратный оператор). Для оператора Нетера это значит, что $\mathrm{N}(P) = \mathrm{X}$. Тогда уравнение $Ax = y'$ может иметь только одно решение. С другой стороны, условие $\beta(A) = \dim {}^{\perp}\mathrm{R}(A) = 0$ равносильно тому, что ${}^{\perp}\mathrm{R}(A) = \{0\}$, то есть $\mathrm{R}(A) = \mathrm{Y}'$. Тогда уравнение $Ax = y'$ имеет решение (или оператор A имеет правый обратный на Y').

Пусть $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – нетеров оператор с размерностями $\alpha(A)$ и $\beta(A)$. Пусть n – наименьшее из чисел $\alpha(A)$ и $\beta(A)$. Если $n = 0$, то, как следует из сказанного выше, A – характеристический оператор Нетера.

Рассмотрим теперь случай, когда $n \geq 1$. Используем биортонормированные системы элементов и двойственные проекторы, введенные в п. 10.

Построим конечномерный оператор из X в Y′ так:

$$K\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{n} < x, x'_j >\ y'_j.$$

По построению $\mathrm{R}(K) \subset \mathrm{R}(Q')$ (эти множества равны, если $n = \beta(A)$) и $\mathrm{N}(P) \subset \mathrm{N}(K)$ (эти множества равны, если $n = \alpha(A)$).

11.1. *Если A – оператор Нетера и $\varkappa(A) \leq 0$, то $N(A+K) = \{0\}$.*
Если A – оператор Нетера и $\varkappa(A) \geq 0$, то $R(A+K) = Y'$.
Если A – оператор Фредгольма, то оператор $A+K$ имеет обратный.

Доказательство.

I. Если $\varkappa(A) \leq 0$, то $\alpha(A) \leq \beta(A)$ и $n = \alpha(A)$. Покажем, что если $x \in \mathrm{N}(A+K)$, то $x = 0$.

Пусть $x \in \mathrm{N}(A+K)$. С помощью проектора P разложим этот элемент в сумму: $x = \check{x} + \hat{x}$, где $\check{x} = Px \in \mathrm{R}(P) = \mathrm{N}(A)$ и $\hat{x} = x - Px \in \mathrm{N}(P)$. Сравним два оператора

$$K\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{\alpha(A)} < x, x'_j >\ y'_j \quad \text{и} \quad P\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{\alpha(A)} < x, x'_j >\ x'_j.$$

В силу утверждения 6.4 имеем $\mathrm{N}(K) = \mathrm{N}(P)$, так как элементы этих множеств удовлетворяют одним и тем же условиям $< \hat{x}, x'_j >= 0,\ \ j = 1\mathinner{..}\alpha(A)$.

Если $\check{x} + \hat{x} \in \mathrm{N}(A+K)$, то $A\check{x} + K\check{x} + A\hat{x} + K\hat{x} = 0$. Так как $\check{x} \in \mathrm{N}(A)$ и $\hat{x} \in \mathrm{N}(K)$, то остается $K\check{x} + A\hat{x} = 0$. Но $K\check{x} \in \mathrm{R}(Q')$ и $\hat{x} \in \mathrm{R}(A)$, эти множества прямо дополняют друг друга. Поэтому $K\check{x} = 0$ и $A\hat{x} = 0$, то есть $\check{x} \in \mathrm{N}(K) = \mathrm{N}(P)$ и $\hat{x} \in \mathrm{N}(A)$. В итоге каждый из элементов $\check{x}$ и $\hat{x}$ содержится и в $\mathrm{N}(A)$, и в $\mathrm{N}(P)$. Следовательно, оба они – нулевые. Поэтому $x = \check{x} + \hat{x} = 0$.

II. Если $\varkappa(A) \geq 0$, то $\beta(A) \leq \alpha(A)$ и $n = \beta(A)$. Покажем, что $\mathrm{R}(A+K) = \mathrm{Y}'$, то есть $\forall y' \in \mathrm{Y}'\ \ \exists x \in \mathrm{X} \mid (A+K)x = y'$.

Пусть $y' \in \mathrm{Y}'$. С помощью проектора Q' разложим этот элемент в сумму: $y' = \check{y}' + \hat{y}'$, где $\check{y}' = Q'y' \in \mathrm{R}(Q')$ и $\hat{y}' = y' - Q'y' \in \mathrm{N}(Q') = \mathrm{R}(A)$.

Будем искать $x = \dot{x} + \ddot{x}$, где элемент $\dot{x}$ такой, что $A\dot{x} = 0$ и $K\dot{x} = \check{y}'$, а элемент $\ddot{x}$ такой, что $A\ddot{x} = \hat{y}'$ и $K\ddot{x} = 0$.

Если

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{\beta(A)} \lambda_k x_k,$$

то $\dot{x} \in \mathrm{N}(A)$. Так как

$$K\dot{x} = \sum_{j=1}^{\beta(A)} < \dot{x}, x_j' > y_j' = \sum_{j=1}^{\beta(A)} \lambda_j y_j'$$

и $\check{y}' \in \mathrm{R}(Q')$, то второе условие для $\dot{x}$ будет выполнено, если $\lambda_j =< y_j, y' >$.

Так как $\hat{y}' \in \mathrm{R}(A)$, то элемент $\tilde{x} = A^{-1}_{\mathrm{N}(P)}\hat{y}'$ удовлетворяет условию $A\tilde{x} = \hat{y}'$. Но этому же условию удовлетворяют все элементы вида

$$\ddot{x} = \tilde{x} + \sum_{k=1}^{\beta(A)} \lambda_k x_k.$$

Тогда условие $K\ddot{x} = 0$ будет выполнено, если

$$\sum_{j=1}^{\beta(A)} < \tilde{x} + \sum_{k=1}^{\beta(A)} \lambda_k x_k,\, y_j' >= 0.$$

Отсюда $\lambda_k = - < \tilde{x}, x_k' >$. Таким образом, $(A + K)(\dot{x} + \ddot{x}) = y'$.

III. Первые две части утверждения имеют непустое пересечение: если $\varkappa(A) = 0$, то при $n = \alpha(A) = \beta(A)$ оператор $A + K$ обратим и слева, и справа. •

Следовательно,

11.2. *Каждый оператор Нетера можно представить в виде разности характеристического оператора и конечномерного оператора.*

Приведем еще одно утверждение – критерий фредгольмовости линейного оператора.

11.3. *Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда $A = B - K$, где B – обратимый оператор, а K – конечномерный оператор.*

Доказательство.

Необходимость этого утверждения следует из третьей части утверждения 11.1.

Достаточность. Пусть $B : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – обратимый оператор, а $K : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ – конечномерный оператор. Рассмотрим оператор $C = I - KB^{-1} : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}'$. Так как оператор B устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами X и Y', то пространство X' является двойственным как к пространству X, так и к пространству Y'. Действительно, бискалярное произведение для новой пары пространств можно определить так: $< y', x' >=< B^{-1}y', x' >$. Поэтому оператор KB^{-1} – конечномерный, а тогда оператор C является каноническим оператором Фредгольма.

Оператор $A = B - K = CB$ имеет те же свойства, что и оператор C. Между элементами $\mathrm{N}(C)$ и $\mathrm{N}(CB)$ имеется линейное взаимно однозначное соответствие, поэтому у этих множеств число элементов в базисе одно и то же. Так как $\mathrm{R}(B) = \mathrm{Y}'$, то $\mathrm{R}(CB) = \mathrm{R}(C)$. Следовательно, множество $\mathrm{R}(CB)$ также замкнуто, и ${}^{\perp}\mathrm{R}(CB) = {}^{\perp}\mathrm{R}(C)$. Поэтому число $\beta(A)$ также конечное. •

Третья часть теоремы 11.1 – лемма Э. Шмидта, а теорема 11.3 – часть теоремы С.М. Никольского.

12. Интегральные операторы Фредгольма

При доказательстве теоремы 4.2 было установлено, что интегральный оператор с непрерывным ядром $k(\tau, t)$

$$A \,:\, x(t) \mapsto x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau,$$

действующий из пространства непрерывных функций в пространство непрерывных функций, имеет двойственный. При исследовании уравнений с такой левой частью и были созданы основы будущей теории операторов Фредгольма. Докажем, что оператор A является оператором Фредгольма, следуя идее Э. Шмидта.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) + \lambda \int\limits_a^b x(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau = f(t), \quad x \in [a, b],$$

с дополнительным параметром λ (потом можно будет положить $\lambda = 1$).

Будем искать решение в виде суммы функционального ряда

$$\varphi_0(t) + \lambda\, \varphi_1(t) + \lambda^2\, \varphi_2(t) + \ldots$$

Пусть

$$\varphi_0(t) = f(t), \quad \varphi_1(t) = \int\limits_a^b \varphi_0(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau, \ldots$$

Обозначим

$$K = \max |k(\tau, t)|, \quad F = \max |f(t)|.$$

Тогда

$$|\varphi_0(t)| \le F, \quad |\varphi_1(t)| \le F\, K\, (b - a), \quad \ldots, \quad |\varphi_n(t)| \le F\, K^n\, (b - a)^n, \quad \ldots$$

Следовательно, функциональный ряд сходится при условии

$$|\lambda|\, K\, (b - a) < 1.$$

Отсюда следует

12.1. *При $K\,(b - a) < 1$ интегральное уравнение с непрерывным ядром и непрерывной правой частью*

$$x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau = f(t), \quad x \in [a, b],$$

имеет решение в классе непрерывных функций, и это решение единственно.

Среди интегральных уравнений особое место занимают интегральные уравнения с вырожденными ядрами, то есть с ядрами вида

$$k(\tau, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(\tau)\, q_j(t).$$

В рамках изложенной выше теории интегральный оператор с таким ядром является конечномерным.

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное n и такие функции $p_j(\tau),\ q_j(t),\ j = 1\,..\,n$, что

$$\left| k(\tau, t) - \sum_{j=1}^{n} p_j(\tau)\, q_j(t) \right| < \varepsilon \quad \forall \tau, t \in [a, b].$$

Это значит, что любой интегральный оператор с непрерывным ядром можно представить в виде суммы обратимого оператора и конечномерного оператора. Поэтому

12.2. *Интегральный оператор с непрерывным ядром, действующий в пространстве непрерывных функций, является оператором Фредгольма.*

Глава 3. Абстрактные приближенные схемы

Абстрактной приближенной схемой будем называть параметрическое семейство задач, аппроксимирующих исходную абстрактную задачу. Слово "*аппроксимировать*" будем понимать как "заменить на близкий". При этом подразумевается, что аппроксимирующая задача в каком-то смысле проще для исследования, чем исходная.

Абстрактная задача может быть поставлена так: в некотором множестве нужно найти элемент, удовлетворяющий заданным условиям. Часто встречается случай, когда эти условия можно записать в виде операторного уравнения

$$F(x) = y, \quad x \in \mathrm{X}, \quad y \in \mathrm{Y},$$

где $F : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ — отображение (или оператор), действующее из множества X в множество Y. Уравнение

$$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{\mathrm{X}}, \quad \overline{y} \in \overline{\mathrm{Y}}$$

аппроксимирует исходное уравнение, если множества $\overline{\mathrm{X}}$ и $\overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимируют множества X и Y, отображение $\overline{F} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимирует отображение F и элемент $\overline{y}$ аппроксимирует элемент y. В каком смысле две задачи, два отображения или два множества следует считать близкими — уточним позже.

Аппроксимирующие уравнения, как правило, по построению образуют *параметрическое семейство.* Чаще всего такое семейство представляет собой последовательность уравнений. Это легко увидеть, например, в случае, когда искомый элемент x — функция, а аппроксимирующий его элемент $\overline{x}$ — вектор, составленный из ее значений в некоторых фиксированных точках множества определения или из коэффициентов разложения функции по некоторому базису. Таким образом, последовательность аппроксимирующих уравнений вида

$$\overline{F}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) = \overline{y}^{(n)}, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{\mathrm{X}}^{(n)}, \quad \overline{y}^{(n)} \in \overline{\mathrm{Y}}^{(n)}$$

— *приближенная схема* для операторного уравнения.

Абстрактная задача может быть поставлена не только в виде некоторого уравнения, но и каким-либо другим способом. Например, как задача на собственные значения, или как экстремальная задача, или как-то еще.

Вполне естественно ожидать, что при хорошей аппроксимации какие-либо свойства точной задачи переносятся на аппроксимирующую задачу, и наоборот. Для линейных интегральных уравнений приближенная схема – это последовательность систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих исходное уравнение. Если, например, интегральное уравнение может иметь только одно решение, то, как будет показано ниже, при определенных условиях аппроксимирующие его уравнения также могут иметь только одно решение.

13. Нормированные пространства и ограниченные операторы

Линейное пространство X называется *нормированным пространством*, если каждому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число $||x||$ (*норма* x) и это соответствие имеет следующие свойства:

1) $||x|| \geq 0; \quad ||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Здесь $|\lambda|$ – абсолютная величина вещественного числа λ или модуль комплексного числа. Легко видеть, что норма – вещественный функционал на X.

Норма в линейном пространстве может быть задана разными способами. Например, в пространстве n-мерных векторов R^n чаще всего используют две нормы:

$$||x|| = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{или} \qquad ||x|| = \max_{j=1\,..\,n} |x_j|,$$

первая норма называется *сферической*, вторая норма называется *кубической*. Аналогично, в пространстве $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$,

$$||x(\cdot)||^2 = \int\limits_a^b x^2(t)\,dt \qquad \text{или} \qquad ||x(\cdot)|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

В пространстве со скалярным произведением естественная норма $||x||^2 = (x,x)$. Так что сферические нормы в R^n и $C[a,b]$ являются нормами, порожденными скалярным произведением.

С помощью нормы естественным образом определяется *расстояние между элементами* в линейном пространстве: $\rho(x,y) = ||x-y||$. Таким образом, близость элементов в нормированном пространстве можно оценивать как норму их разности.

Множество элементов X называется *ограниченным*, если найдется такое число $M>0$, что $||x|| \le M$ для всех элементов x этого множества.

Пусть X и Y – нормированные пространства. Отображение $F\ :\ \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ называется *ограниченным*, если

$$\exists M>0 \quad | \quad ||F(x)|| \le M\,||x|| \quad \forall x\in \mathrm{D}(F).$$

Очевидно, что при этом любое ограниченное в X множество из $\mathrm{D}(F)$ переводится в ограниченное в Y множество.

Как частный случай, линейный оператор $A : \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ называется *ограниченным*, если

$$\exists M>0 \quad | \quad ||Ax|| \le M\,||x|| \quad \forall x\in \mathrm{D}(A).$$

Тогда при $x \neq 0$ множество чисел $||Ax||/||x||$ ограничено сверху. Его точную верхнюю грань называют *нормой оператора* A. Легко видеть, что

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||A\,x||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||A\,x||.$$

Очевидное неравенство

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \quad \forall x \in \mathrm{D}(A)$$

часто используется при оценках сверху.

Множество линейных операторов, действующих в одних и тех же пространствах и имеющих общее множество определения, является линейным пространством. Операции сложения и умножения на скаляр вводятся очевидным образом. В этом случае норма оператора удовлетворяет всем необходимым условиям, и это множество – нормированное пространство.

Докажем важное в дальнейшем утверждение.

13.1. *Линейный оператор A имеет ограниченный обратный на $R(A)$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists m > 0 \;\mid\; ||A\,x|| \geq m\,||x|| \;\; \forall x \in D(A).$$

Необходимость. Пусть A^{-1} — ограниченный обратный к A оператор на $\mathrm{R}(A)$ и $\exists M > 0 \;\mid\; ||A^{-1}y|| \leq M\,||y|| \quad \forall y \in \mathrm{R}(A)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(A)$ и $y = A\,x$. Тогда

$$||Ax|| = ||y|| \geq \frac{1}{M}\,||A^{-1}y|| = \frac{1}{M}\,||A^{-1}Ax|| = \frac{1}{M}\,||x||.$$

Получили, что нужное неравенство выполнено при $m = 1/M$.

Достаточность. С другой стороны, пусть неравенство из утверждения выполнено. Предположим, что $x \in \mathrm{N}(A)$. Тогда $||x|| \leq 1/m\,||A\,x|| = 0$ и, следовательно, $x = 0$. Так как $\mathrm{N}(A) = \{0\}$, то существует обратный оператор A^{-1}. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$ и $x = A^{-1}y$. Тогда

$$||A^{-1}y|| = ||x|| \leq \frac{1}{m}\,||Ax|| = \frac{1}{m}\,||AA^{-1}y|| = \frac{1}{m}\,||y|| \;\; \forall y \in \mathrm{R}(A),$$

то есть обратный оператор ограничен. •

14. Аппроксимация и интерполяция. Априорные оценки погрешности

Будем говорить, что *пространство* $\overline{\mathrm{X}}$ *аппроксимирует пространство* X, если указаны такие линейные операторы $T_X \ : \ \mathrm{X} \to \overline{\mathrm{X}},\ S_X \ : \ \overline{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$, что $T_X\, S_X = I$. Аналогично, пространство $\overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимирует пространство Y, если указаны такие линейные операторы $T_Y \ : \ \mathrm{Y} \to \overline{\mathrm{Y}},\ S_Y \ : \ \overline{\mathrm{Y}} \to \mathrm{Y}$, что $T_Y\, S_Y = I$. Операторы T_X, T_Y будем называть *операторами аппроксимации*, а операторы S_X, S_Y – *операторами интерполяции.*

Отметим, что если $S_X\, T_X = I$, то операторы T_X и S_X являются взаимно обратными. Тогда пространства X и $\overline{\mathrm{X}}$ будут эквивалентными. В этом случае вырождается сама идея аппроксимации. Так что при невырожденной аппроксимации $S_X\, T_X \neq I$. Но интуитивно ясно, что чем ближе оператор $S_X\, T_X$ к тождественному оператору, тем ближе пространство $\overline{\mathrm{X}}$ к пространству X.

Элементы x и $\overline{x}$, y и $\overline{y}$ принадлежат разным пространствам. Поэтому для оценки их близости определим *S-погрешность решения* как $||x - S_X\,\overline{x}||$, *$T$-погрешность решения* как $||T_X\, x - \overline{x}||$, *$S$-погрешность правой части* как $||y - S_Y\,\overline{y}||$ и, наконец, *T-погрешность правой части* как $||T_Y\, y - \overline{y}||$. Покажем, как $S-$ и $T-$ погрешности связаны друг с другом.

14.1. *Если оператор T_X ограничен, то $||T_X\, x - \overline{x}|| \le ||T_X|| \cdot ||x - S_X\,\overline{x}||$;
если оператор T_Y ограничен, то $||T_Y\, y - \overline{y}|| \le ||T_Y|| \cdot ||y - S_Y\,\overline{y}||$;
если оператор S_X ограничен, то $||x - S_X\,\overline{x}|| \le ||S_X|| \cdot ||T_X\, x - \overline{x}|| + ||(S_X\, T_X - I)x||$;
если оператор S_Y ограничен, то $||y - S_Y\,\overline{y}|| \le ||S_Y|| \cdot ||T_Y\, y - \overline{y}|| + ||(S_Y\, T_Y - I)y||$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$T_X\, x - \overline{x} = T_X\, x - T_X\, S_X\overline{x} = T_X\,(x - S_X\,\overline{x}),$$

$$x - S_X\,\overline{x} = x - S_X\, T_X\, x + S_X\, T_X\, x - S_X\,\overline{x} = (I - S_X\, T_X)\, x + S_X\,(T_X\, x - \overline{x}).$$

Отсюда следуют первое и третье неравенства леммы. Второе и четвертое неравенства доказываются аналогичным образом. •

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ – линейный оператор,

$$A\,x = y, \quad x \in \mathrm{X}, \quad y \in \mathrm{Y}$$

– линейное операторное уравнение.

Если пространства $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимируют пространства X, Y, то любой линейный оператор $\overline{A} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}}$ будем называть *аппроксимирующим* оператор A, а уравнение

$$\overline{A}\,\overline{x} = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{\mathrm{X}}, \quad \overline{y} \in \overline{\mathrm{Y}}$$

– *аппроксимирующим.* При этом пространства X, Y, оператор A и исходное уравнение будем называть *точными.*

На рис. 14.1 показано, откуда и куда действуют рассматриваемые линейные операторы.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{X} & \xrightarrow{A} & \mathrm{Y} & \\ T_X & \downarrow\uparrow\; S_X & & \downarrow\uparrow\; S_Y & T_Y \\ & \overline{\mathrm{X}} & \xrightarrow{\overline{A}} & \overline{\mathrm{Y}} & \end{array}$$

Рис. 14.1.

Получим априорные оценки погрешности приближенного решения (ничего пока не предполагая о существовании и единственности решений точного и аппроксимирующего уравнений).

14.2. *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ *и* $y = A\,x$, $\overline{y} = \overline{A}\,\overline{x}$. *Если* $S_X\,\overline{x} \in D(A)$, $x - S_X\,\overline{x} \notin N(A)$ *и оператор* S_Y *ограничен, то* $\exists L > 0 \;|$

$$||x - S_X\,\overline{x}|| \leq$$

$$\leq L\Big\{||(I - S_Y\,T_Y)\,A\,(x - S_X\,\overline{x})|| + ||S_Y|| \cdot ||T_Y\,y - \overline{y}|| + ||S_Y|| \cdot ||(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}||\Big\}.$$

Доказательство. Так как $0 \in \mathrm{N}(A)$, то $x - S_X\,\overline{x} \neq 0$. Очевидно, что

$$||x - S_X\,\overline{x}|| = \frac{||x - S_X\,\overline{x}||}{||A(x - S_X\,\overline{x})||}\,||A(x - S_X\,\overline{x})||.$$

Пусть $L = ||x - S_X\,\overline{x}||\,/\,||A(x - S_X\,\overline{x})||$. Тогда $||x - S_X\,\overline{x}|| = L\,||A(x - S_X\,\overline{x})||$, при этом

$$A\,(x - S_X\,\overline{x}) = A\,(x - S_X\,\overline{x}) - S_Y\,T_Y\,A\,(x - S_X\,\overline{x}) +$$

$$+ S_Y\,T_Y\,y - S_Y\,\overline{y} + S_Y\,\overline{A}\,\overline{x} - S_Y\,T_Y\,A\,S_X\,\overline{x} =$$

$$= (I - S_Y\,T_Y)\,A\,(x - S_X\,\overline{x}) + S_Y\,(T_Y\,y - \overline{y}) + S_Y\,(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}. \quad \bullet$$

В неравенстве из утверждения 12.2 выражение $x - S_X\overline{x}$ присутствует и слева, и справа, в том числе и в выражении константы L. Получилось так, что S-погрешность решения выражается сама через себя. Но если оператор A имеет ограниченный обратный, то есть $||Ax|| \geq m||x||$, то L заменяется на $1/m$. При этом $N(A) = \{0\}$, и условие $x - S_X\,\overline{x} \notin N(A)$ становится излишним, так как при $x - S_X\,\overline{x} = 0$ полученное неравенство теряет смысл (оно теперь выполняется при любом $L \geq 0$).

Пусть, кроме того, оператор A ограничен, $||Ax|| \leq M||x||$ и оператор $S_Y T_Y$ настолько близок к тождественному, что $||S_Y T_Y - I|| < m/M$. Тогда

$$||x - S_X\overline{x}|| \leq \frac{||S_Y||}{m - M\,||S_Y\,T_Y - I||}\Big(||T_Y y - \overline{y}|| + ||(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}||\Big).$$

Если определены нормы операторов A и A^{-1}, то имеем

$$||x - S_X\overline{x}|| \leq \frac{||S_Y|| \cdot ||A^{-1}||}{1 - ||S_Y\,T_Y - I|| \cdot ||A|| \cdot ||A^{-1}||}\Big(||T_Y y - \overline{y}|| + ||(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}||\Big).$$

Неравенство из утверждения 14.2 (априорная оценка погрешности решения) показывает, что приближенное решение $\widetilde{x} = S_X\overline{x}$ будет близким к точному решению x, если достаточно малы три слагаемых в правой части неравенства. Первое слагаемое определяет, насколько хорошо правая часть аппроксимирующего уравнения приближает правую часть точного уравнения. Второе слагаемое оценивает близость операторов A и $\overline{A}$. Третье слагаемое показывает, насколько оператор $S_Y\,T_Y$ близок к тождественному. По величине правой части неравенства можно оценивать, насколько близким является аппроксимирующее уравнение к точному уравнению.

14.3. *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ *и* $y = A\,x$, $\overline{y} = \overline{A}\,\overline{x}$. *Если* $T_X\,x \in D(\overline{A})$, $T_X\,x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$ *и оператор* T_Y *ограничен, то* $\exists L > 0 \;|$

$$||T_X x - \overline{x}|| \leq L\Big\{||T_Y y + ||T_Y|| \cdot ||(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x||\Big\}.$$

Доказательство. Пусть

$$L = ||T_X x - \overline{x}|| \,/\, ||\overline{A}\,(T_X x - \overline{x})||).$$

Тогда $||T_X x - \overline{x}|| = L\,||\overline{A}\,(T_X x - \overline{x})||$, при этом

$$\overline{A}\,(T_X x - \overline{x}) = T_Y\,S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x - T_Y\,A\,x + T_Y\,y - \overline{y}. \quad \bullet$$

Замечание. Если оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный, то можно выбрать $L = 1/||\overline{A}^{-1}||$. Тогда не нужно предполагать, что $T_X\,x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$.

15. Условия единственности решений

Покажем, что если точный и аппроксимирующий операторы достаточно близки друг к другу, то при некотором условии они одновременно обратимы, точнее имеют ограниченные (левые) обратные операторы. Напомним, что оператор A имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда

$$\exists m > 0 \quad | \quad ||Ax|| \geq m\,||x|| \quad \forall x \in D(A)$$

и оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда

$$\exists \overline{m} > 0 \quad | \quad ||\overline{A}\,\overline{x}|| \geq \overline{m}\,||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}).$$

При оценках снизу норм элементов будем использовать два простых неравенства

$$||x|| \geq ||y|| - ||x - y|| \qquad \text{и} \qquad ||x|| \geq \frac{||Ax||}{||A||} \quad (||A|| \neq 0).$$

15.1. *Пусть $S_X\overline{x} \in D(A)$ $\forall \overline{x} \in D(\overline{A})$ и операторы S_Y и T_X ограничены. Пусть оператор A имеет ограниченный обратный и выполняются условия*

$$||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}|| \leq m_1\, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}),$$

$$||(S_Y\, T_Y - I)\, A\, S_X\, \overline{x}|| \leq m_2\, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}),$$

(величины m_1 и m_2 не зависят от $\overline{x}$). Если

$$(m_1\, ||S_Y|| + m_2)\, ||T_X|| < m,$$

то оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный.

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in D(\overline{A})$. Оценим

$$||\overline{A}\, \overline{x}|| \geq ||T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| - ||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}||,$$

при этом

$$||T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| \geq \frac{1}{||S_Y||}\, ||S_Y\, T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| \geq$$

$$\geq \frac{1}{||S_Y||}\Big(||A\, S_X\, \overline{x}|| - ||(S_Y\, T_Y - I)\, A\, S_X\, \overline{x}||\Big)$$

и

$$||A\, S_X\, \overline{x}|| \geq m\, ||S_X\, \overline{x}|| \geq \frac{m}{||T_X||}\, ||T_X\, S_X\, \overline{x}|| = \frac{m}{||T_X||}\, ||\overline{x}||.$$

Следовательно,

$$||\overline{A}\, \overline{x}|| \geq \left(\frac{1}{||S_Y||}\Big(\frac{m}{||T_X||} - m_2\Big) - m_1\right) ||\overline{x}|| = \overline{m}\, ||\overline{x}||,$$

где

$$\overline{m} = \frac{m - (m_1\, ||S_Y|| + m_2)\, ||T_X||}{||S_Y|| \cdot ||T_X||}.$$

Если выполнено неравенство из условия утверждения, то $\overline{m} > 0$. •

Замечание. Ясно, что в качестве чисел m_1 и m_2 имеет смысл брать наименьшие возможные, то есть нормы операторов $\overline{A} - T_Y A S_X$ и $(S_Y T_Y - I) A S_X$. Но вычислять нормы операторов иногда достаточно трудно, а получить для них оценки сверху, как правило, существенно проще.

15.2. *Пусть* $T_X\,x \in D(\overline{A}) \quad \forall x \in D(A)$ *и операторы* S_X *и* T_Y *ограничены. Пусть оператор* $\overline{A}$ *имеет ограниченный обратный и выполняются условия*

$$||(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x|| \le \overline{m}_1\,||x|| \quad \forall x \in D(A),$$

$$||(S_X\,T_X - I)\,x|| \le \overline{m}_2\,||x|| \quad \forall x \in D(A),$$

(постоянные $\overline{m}_1$ *и* $\overline{m}_2$ *не зависят от* x*). Если*

$$\overline{m}_1\,||S_X|| \cdot ||T_Y|| < \overline{m}(1 - \overline{m}_2),$$

то оператор A *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Пусть $x \in D(A)$. Оценим

$$||A\,x|| \ge ||S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x|| - ||(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x||,$$

при этом

$$||S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x|| \ge \frac{1}{||T_Y||}\,||\overline{A}\,T_X\,x|| \ge \frac{\overline{m}}{||T_Y||}\,||T_X\,x|| \ge \frac{\overline{m}}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}\,||S_X\,T_X\,x||$$

и

$$||S_X\,T_X\,x|| \ge ||x|| - ||(I - S_X\,T_X)\,x||.$$

Следовательно,

$$||A\,x|| \ge \left(\frac{\overline{m}}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}\,(1 - \overline{m}_2) - \overline{m}_1\right)||x|| = m\,||x||,$$

где

$$m = \frac{\overline{m}(1 - \overline{m}_2) - \overline{m}_1\,||T_Y|| \cdot ||S_X||}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}.$$

Если выполнено неравенство из условия утверждения, то $m > 0$. •

15.3. *Пусть определены нормы обратных операторов* A^{-1} *и* $\overline{A}^{-1}$*. Если выполнены условия утверждения 15.1, то*

$$||\overline{A}^{-1}|| \le \frac{||S_Y||\,||T_X||\,||A^{-1}||}{1 - (m_1\,||S_Y|| + m_2)\,||T_X||\,||A^{-1}||}.$$

Если выполнены условия утверждения 15.2, то

$$||A^{-1}|| \le \frac{||T_Y||\,||S_X||\,||\overline{A}^{-1}||}{1 - \overline{m}_2 - \overline{m}_1\,||T_Y||\,||S_X||\,||\overline{A}^{-1}||}.$$

Знать, что аппроксимирующий оператор имеет обратный оператор, важно по следующей причине. Если пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ конечномерные и имеют одну и ту же размерность, то аппроксимирующее уравнение представляет собой СЛАУ. Известно, что ее решение существует при любой правой части, если доказано, что эта система может иметь только одно решение (из единственности решения следует его существование). Именно такой случай наиболее часто встречается на практике. В бесконечномерном случае аналогичное утверждение также имеет место, если $\overline{A}$ — оператор Фредгольма или оператор, для которого выполняется хотя бы только альтернатива Фредгольма. Но в общем случае из того, что существует решение точного уравнения с правой частью y, вовсе не следует, что существует решение аппроксимирующего уравнения с правой частью $\overline{y} = T_Y y$.

В следующих двух параграфах мы рассмотрим два приближенных метода решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

$$(Ax)(t) \equiv x(t) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

– *метод механических квадратур* и *метод Галеркина.* Покажем, как с помощью утверждения 15.1 можно убедиться в том, что при определенных условиях аппроксимирующие уравнения имеют единственное решение. Для этого получим и исследуем выражения для величин m_1 и m_2 в неравенствах

$$||(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}|| \le m_1\, ||\overline{x}|| \quad \text{и} \quad ||(S_Y T_Y - I) A S_X \overline{x}|| \le m_2\, ||\overline{x}||.$$

16. Метод механических квадратур

Пусть точные пространства

$$X = Y = C([\alpha, \beta]), \quad ||x(\cdot)|| = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |x(t)|.$$

Зададим точки аппроксимации $t_1, \ldots, t_n$ на $[\alpha, \beta]$. Пусть оператор аппроксимации

$$T \,:\, x(\cdot) \mapsto \overline{x} = (x(t_1), \ldots, x(t_n)),$$

оператор интерполяции (кусочно–линейная интерполяция)

$$S \,:\, \overline{x} \mapsto \widetilde{x}(t) = \overline{x}_j \, \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + \overline{x}_{j+1} \, \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$$

и аппроксимирующие пространства

$$\overline{X} = \overline{Y} = R^n, \quad ||\overline{x}|| = \max_j |\overline{x}_j| \quad \text{(кубическая норма)}.$$

Легко видеть, что $||Tx\,(\cdot)|| \le ||x(\cdot)||$ и $||S\,\overline{x}|| \le ||\widetilde{x}||$ (т. е. операторы T и S ограничены). Более того, $||T|| = 1,\ ||S|| = 1$.

Аппроксимирующее уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(\overline{A}\,\overline{x})_k \equiv \overline{x}_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\Big[\overline{x}_j\, K(t_j, t_k) + \overline{x}_{j+1}\, K(t_{j+1}, t_k)\Big]\,(t_{j+1} - t_j) = \overline{y}_k, \quad k = 1\,..\,n,$$

при замене интеграла на сумму использована квадратурная формула трапеций.

Первая норма

$$||(\overline{A} - TAS)\overline{x}|| = \max_{k=1\,..\,n} |(\overline{A}\overline{x})_k - (TAS\overline{x})_k|,$$

здесь компонента вектора с номером k

$$(\overline{A}\overline{x})_k = \overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n-1}[\overline{x}_j\, K(t_j, t_k) + \overline{x}_{j+1}\, K(t_{j+1}, t_k)]\, \frac{t_{j+1} - t_j}{2} =$$

$$= \overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n-1}\Big[\overline{x}_j\, K(t_j, t_k) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau + \overline{x}_{j+1}\, K(t_{j+1}, t_k) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau\Big],$$

так как

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau = \frac{t_{j+1} - t_j}{2}.$$

Далее,

$$(AS\overline{x})(t) = \widetilde{x}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau.$$

Следовательно, при $t = t_k$

$$(TAS\overline{x})_k = \overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Big[\overline{x}_j\, \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{k+j} - t_j} + \overline{x}_{j+1}\, \frac{\tau - t_j}{t_{k+j} - t_j}\Big]\, K(\tau, t_k)\, d\tau.$$

Тогда

$$|(\overline{A}\overline{x})_k - (TAS\overline{x})_k| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Big[|\overline{x}_j|\, |K(t_j, t_k) - K(\tau, t_k)|\, \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{k+j} - t_j} +$$

$$+ |\overline{x}_{j+1}|\, |K(t_{j+1}, t_k) - K(\tau, t_k)|\, \frac{\tau - t_j}{t_{k+j} - t_j}\Big]\, d\tau$$

и окончательно

$$||(\overline{A} - TAS)\overline{x}|| \le m_1\, ||\overline{x}||,$$

где

$$m_1 = \max_{k=1\,..\,n} \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Big[|K(t_j, t_k) - K(\tau, t_k)|\, \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{k+j} - t_j} +$$

$$+ |K(t_{j+1}, t_k) - K(\tau, t_k)|\, \frac{\tau - t_j}{t_{k+j} - t_j}\Big]\, d\tau.$$

При оценке второй нормы обозначим $z(t) = (AS_X\overline{x})(t)$. Тогда

$$||(ST - I)AS\overline{x}|| = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |STz(t) - z(t)| = \max_{k=1\,..\,n}\ \max_{t\in[t_k, t_{k+1}]} |STz(t) - z(t)|.$$

При $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$STz(t) - z(t) = z(t_k)\, \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + z(t_{k+1})\, \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} - z(t) =$$

$$= \overline{x}_k\, \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}(\tau) K(\tau, t_k)\, d\tau +$$

$$+\overline{x}_{k+1}\,\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}+\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)K(\tau,t_{k+1})\,d\tau-$$

$$-\widetilde{x}(t)-\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)K(\tau,t)\,d\tau,$$

здесь

$$\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)K(\tau,t)\,d\tau=\Big[\frac{t_{k+1}-\tau}{t_{k+1}-t_k}+\frac{\tau-t_k}{t_{k+1}-t_k}\Big]\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)K(\tau,t)\,d\tau.$$

Очевидно, что

$$\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}+\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}=1.$$

Поэтому

$$S_YT_Yz(t)-z(t)=\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)[K(\tau,t_k)-K(\tau,t)]\,d\tau+$$

$$+\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\widetilde{x}(\tau)[K(\tau,t_{k+1})-K(\tau,t)]\,d\tau.$$

Так как $|\widetilde{x}(\tau)|\le||\overline{x}||$, то

$$|STz(t)-z(t)|\le m_2\,||\overline{x}||,$$

где

$$m_2=\max_{k=1\,..\,n}\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\Big[\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|K(\tau,t_k)-K(\tau,t)|\,d\tau+$$

$$+\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|K(\tau,t_{k+1})-K(\tau,t)|\,d\tau\Big].$$

Пусть ядро интегрального уравнения $K(\tau,t)$ – непрерывная функция на $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$. Эта функция также является равномерно непрерывной, то есть для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что $|K(\tau',t')-K(\tau'',t'')|<\varepsilon$ при $|\tau'-\tau''|<\delta,\ |t'-t''|<\delta$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Число δ выберем по $\varepsilon(\beta - \alpha)$. Пусть

$$h = \max_{j=1..n-1}(t_{j+1} - t_j) < \delta.$$

Это условие всегда может быть выполнено за счет выбора параметра приближенной схемы n. Если, например, точки t_j находятся на равном расстоянии h друг от друга, то $h = (\beta - \alpha)/(n-1)$.

Тогда в выражениях m_1 и m_2 все абсолютные величины разностей значений функции $K(\tau, t)$ будут меньше $\varepsilon(\beta - \alpha)$. Следовательно, $m_1 < \varepsilon$ и $m_2 < \varepsilon$. Мы доказали, что начиная с некоторого значения n выполняется неравенство из утверждения 15.1.

17. Метод Галеркина

Пусть $X = Y = L_2(\alpha, \beta)$,

$$||x(\cdot)||^2 = \int\limits_\alpha^\beta |x(t)|^2\, dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега) и $< x(\cdot), y(\cdot) >$ – скалярное произведение функций в пространстве $L_2(\alpha, \beta)$. Пусть $\varphi_j(\cdot),\ j = 1, 2, \ldots$ – ортонормированная система функций в $L_2(\alpha, \beta)$, то есть $< \varphi_k(\cdot), \varphi_j(\cdot) >= \delta_{kj},\ \ k, j = 1, 2, \ldots$ Любому элементу $x(\cdot) \in L_2(\alpha, \beta)$ можно поставить в соответствие набор чисел $\overline{x}_j =< x(\cdot), \varphi_j(\cdot) >$ (коэффициентов Фурье) и формальный ряд (ряд Фурье)

$$\sum_{j=1}^{+\infty} < x(\cdot), \varphi_j(\cdot) > \ \varphi_j(\cdot).$$

Пусть

$$T\ :\ x(\cdot) \mapsto \overline{x} = (< x(\cdot), \varphi_1(\cdot) >, \ldots, < x(\cdot), \varphi_n(\cdot) >)$$

и

$$S\ :\ \overline{x} \mapsto \widetilde{x}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\, \varphi_j(\cdot)$$

(частная сумма ряда Фурье). При этом $\overline{X} = \overline{Y} = R^n$ со сферической нормой

$$||\overline{x}||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\overline{x}_j|^2.$$

Метод Галеркина состоит в следующем: приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода ищем в виде

$$\widetilde{x}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, \varphi_j(\cdot).$$

Подставим это выражение в уравнение и умножим скалярно обе части на $\varphi_k(\cdot)$, $k = 1 \,.\,.\, n$. Получим аппроксимирующую СЛАУ

$$\overline{A}\,\overline{x} \equiv \overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, K_{kj} = \overline{y}_k, \quad k = 1 \,.\,.\, n,$$

$$K_{kj} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} K(\tau, t) \, \varphi_j(\tau) \, \varphi_k(t) \, d\tau \, dt.$$

Рассмотрим первое неравенство из утверждения 3.1. Все компоненты вектора $\overline{z} = (\overline{A} - T_Y \, A \, S_X) \, \overline{x}$ равны нулю:

$$\overline{z}_k = \overline{x}_k - < \widetilde{x}(\cdot) + \int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{x}(\tau) \, K(\tau, \cdot) \, d\tau, \, \varphi_k(\cdot) >= 0.$$

Поэтому $||(\overline{A} - T_Y \, A \, S_X) \, \overline{x}|| = 0$ и первое неравенство выполняется при любом $m_1 \geq 0$ (но, конечно, можно принять, что $m_1 = 0$).

Рассмотрим теперь второе неравенство. Пусть $z(\cdot) \in L_2(\alpha, \beta)$. Тогда функция

$$(I - S_Y \, T_Y) z(\cdot) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} < z(\cdot), \varphi_k(\cdot) > \ \varphi_k(\cdot)$$

– остаток ряда Фурье функции $z(\cdot)$. При

$$z(t) = A S_X \overline{x} = \widetilde{x}(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{x}(\tau) K(\tau, t) \, d\tau = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \left[\varphi_j(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\tau) \, K(\tau, t) \, d\tau \right]$$

получим

$$(I - S_Y \, T_Y) z(\cdot) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, K_{kj} \right) \varphi_k(\cdot).$$

Из неравенства Гельдера

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \ \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

следует, что

$$||(I - S_Y\, T_Y)\, A\, S_X\, \overline{x}||^2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |(I - S_Y\, T_Y)\, z(t)|^2\, dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\, K_{kj}\Bigr)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} |\overline{x}_j|^2\ \sum_{j=1}^{n} |K_{kj}|^2\Bigr) \le m_2^2\ ||\overline{x}||^2,$$

где

$$m_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} |K_{kj}|^2 \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |K_{kj}|^2 \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty.$$

Как и в случае метода механических квадратур, начиная с некоторого n условие утверждения 3.1 будет выполнено.

Таким образом, мы доказали следующее.

Если интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода может иметь только одно решение, то аппроксимирующая его СЛАУ при достаточно большом n имеет решение и только одно.

Заметим, что алгоритм метода Галеркина использует только конечное число функций $\varphi_j(\cdot)$. Предположение о том, что эти функции образуют бесконечную последовательность, понадобилось для проверки условий утверждения 15.1.

18. Аппроксимация двойственности

Как было установлено раньше, двойственным к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода является уравнение

$$(A'x')(t) \equiv x'(t) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} x'(\tau)\, K(t,\tau)\, d\tau = y'(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Легко видеть, что аппроксимирующие это уравнение СЛАУ, полученные методом механических квадратур или методом Галеркина, являются двойственными к СЛАУ, аппроксимирующим исходное интегральное уравнение. Двойственными в том смысле, что матрицы коэффициентов у таких СЛАУ являются взаимно транспонированными. Аналогичный эффект наблюдается и в случае абстрактных операторных уравнений.

Пусть X, X' и Y, Y' — двойственные пространства, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ и $A' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ — двойственные операторы. Пусть пространства $\overline{\mathrm{X}}$ и $\overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимируют пространства X и Y, а T_X, S_X, T_Y, S_Y — операторы аппроксимации и интерполяции. Чтобы аппроксимировать пространства X', Y' и оператор A', нужно определить операторы T'_X, S'_X, T'_Y, S'_Y и $\overline{A'}$ (см. рис. 18.1).

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{X}' & & \xleftarrow{A'} & & \mathrm{Y}' & \\ T_{X'} & \downarrow\uparrow & S_{X'} & & T_{Y'} & \downarrow\uparrow & S_{Y'} \\ & \overline{\mathrm{X}'} & & \xleftarrow{\overline{A'}} & & \overline{\mathrm{Y}'} & \end{array}$$

Рис. 18.1.

Рассмотрим естественный способ аппроксимации двойственных пространств и операторов. Пусть $\overline{\mathrm{X}}'$ и $\overline{\mathrm{Y}}'$ — пространства, двойственные к $\overline{\mathrm{X}}$ и $\overline{\mathrm{Y}}$.

18.1. *Если операторы T_X и S_X имеют двойственные, то пространство $\overline{X}'$ аппроксимирует пространство X'.*

Доказательство. По определению операторов аппроксимации и интерполяции $T_X S_X = I$ (в пространстве $\overline{\mathrm{X}}$). Из свойств 3) и 5) двойственных операторов следует, что для операторов $T'_X : \overline{\mathrm{X}}' \to \mathrm{X}'$ и $S'_X : \mathrm{X}' \to \overline{\mathrm{X}}'$ выполняется тождество $S'_X T'_X = I$ (в пространстве $\overline{\mathrm{X}}'$). Поэтому $\overline{\mathrm{X}}'$ — аппроксимация X', при этом операторы аппроксимации и интерполяции таковы, что $T_{X'} = S'_X$, $S_{X'} = T'_X$. •

Заметим, что равенство $\overline{\mathrm{X}'} = \overline{\mathrm{X}}'$ не означает, что операции аппроксимации и двойственности коммутируют. Это равенство показывает, что пространство $\overline{\mathrm{X}}'$ может быть выбрано в качестве аппроксимации пространства X' (из всех возможных аппроксимаций).

Утверждение 18.1 можно было бы сформулировать в другой форме: *пространство, двойственное к аппроксимирующему пространству, аппроксимирует пространство, двойственное к точному.*

По аналогии можно выбирать $\overline{\mathrm{Y}'} = \overline{\mathrm{Y}}'$.

18.2. *Если оператор $\overline{A}'$ существует, то он аппроксимирует оператор A'.*

Доказательство. Пусть оператор $\overline{A} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимирует оператор $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Как следует непосредственно из определения двойственного оператора, оператор $\overline{A}'$ действует из $\overline{\mathrm{Y}}'$ в $\overline{\mathrm{X}}'$.

Равенство $\overline{A'} = \overline{A}'$ также следует понимать в том смысле, что $\overline{A}'$ – один из операторов, аппроксимирующих A'. Можно выбрать и другой аппроксимирующий оператор. •

Если $\overline{\mathrm{X}'} = \overline{\mathrm{X}}'$, $\overline{\mathrm{Y}'} = \overline{\mathrm{Y}}'$ и $\overline{A'} = \overline{A}'$, то диаграмма на рис. 18.1 уточняется следующим образом (см. рис. 18.1).

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{X}' & & \xleftarrow{A'} & & \mathrm{Y}' & \\ S'_X & \downarrow\uparrow & T'_X & & S'_Y & \downarrow\uparrow & T'_Y \\ & \overline{\mathrm{X}}' & & \xleftarrow{\overline{A}'} & & \overline{\mathrm{Y}}' & \end{array}$$

Рис. 18.1.

18.3. *Если $\overline{A'} = \overline{A}'$, то $(\overline{A}^0)' = \overline{(A')}^0$ и $(\widetilde{A}^0)' = \widetilde{(A')}^0$.*

Доказательство. С одной стороны, при естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_Y\, A\, S_X$ получим $(\overline{A}^0)' = S'_X\, A'\, T'_Y$. С другой стороны $\overline{(A')}^0 = T_{X'}\, A'\, S_{Y'} = S'_X\, A'\, T'_Y$. Поэтому "операции" $\overline{}^0$ и $\,'$ в определенном смысле перестановочны.

Кроме того, $(\widetilde{A}^0)' = (S_Y\, \overline{A}\, T_X)' = T'_X\, \overline{A}'\, S'_Y$ и $\widetilde{(A')}^0 = T'_X\, \overline{A'}\, S'_Y$. Заметим, что при $\overline{A}' \neq \overline{A'}$ второе равенство не выполняется. •

В дополнение к утверждению 18.3 приведем еще пару формул:

$$\overline{(\widetilde{A}^0)}^0 = \overline{(S_Y\, \overline{A}\, T_X)}^0 = T_Y\, S_Y\, \overline{A}\, T_X\, S_X = \overline{A},$$

$$\widetilde{(\overline{A}^0)}^0 = \widetilde{(T_Y\, A\, S_X)}^0 = S_Y\, T_Y\, A\, S_X\, T_X \neq A.$$

Для сопряженных и алгебраически сопряженных пространств и операторов имеют место аналогичные утверждения.

Глава 4. Экстремальные задачи

Абстрактная экстремальная задача ставится так:

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \quad x \in \mathcal{X} \subset X.$$

В ее постановку входят три элемента: *множество* X, на котором определен (вещественнозначный) *функционал* $f(x)$, и *ограничения*, которые выделяют подмножество $\mathcal{X}$ в X.

Поиск экстремума – это поиск или максимума, или минимума. Предполагается, что в множестве X определены окрестности $U(x)$ элементов x. Тогда говорят, что элемент x^0 доставляет локальный минимум функционалу $f(x)$, если $f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in U(x^0)$. Иногда требуется найти только элемент x^0, иногда – значение $f(x^0)$ функционала на нем, а по умолчанию – и то, и другое.

Пусть часть ограничений задана как равенство вида $F(x) = 0$, которому должны удовлетворять искомые элементы. Тогда постановка экстремальной задачи уточняется:

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \quad F(x) = 0, \quad x \in \mathcal{X} \subset X.$$

Здесь возможны две точки зрения: или нужно найти элементы, доставляющие экстремум функционалу при дополнительном ограничении в виде равенства; или нужно найти решения уравнения $F(x) = 0$, доставляющие экстремум.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые гладкие экстремальные задачи, то есть такие задачи, в которых функционалы дифференцируемы. Выделим класс задач, для которых необходимое условие экстремума представляет собой линейное интегральное уравнение. Но предварительно рассмотрим случай, когда и функционал, и уравнение, задающее ограничения, являются линейными.

19. Абстрактное линейное программирование

Линейное программирование – раздел теории экстремальных задач, посвященный методам поиска условного экстремума линейной функции на множестве, заданном с помощью линейных равенств и неравенств. Две классические задачи линейного программирования в стандартной постановке ставятся следующим образом: *прямая задача*

$$< c, x > \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0$$

и *двойственная задача*

$$< b, y > \to \min, \quad A'y \ge c, \quad y \ge 0,$$

здесь $x \in R^n$ и $y \in R^m$ – искомые векторы, $c \in R^n$ и $b \in R^m$ – заданные векторы, A – заданная матрица размера $m \times n$, A' – транспонированная матрица.

Пространства, в которых рассматриваются эти задачи, являются конечномерными. Поставим вопрос: если считать эти задачи аппроксимирующими, то какими могут быть соответствующие им точные задачи?

Самый естественный вариант ответа – задачи *интегрального линейного программирования*: *прямая задача*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} c(\tau)x(\tau)\,d\tau \to \max,$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \le b(t),\ t \in [\gamma,\delta], \quad x(\tau) \ge 0,\ \tau \in [\alpha,\beta],$$

и *двойственная задача*

$$\int\limits_{\gamma}^{\delta} b(t)y(t)\,dt \to \min,$$

$$\int\limits_{\gamma}^{\delta} A(\tau,t)y(t)\,dt \ge c(\tau),\ \tau \in [\alpha,\beta], \quad y(t) \ge 0,\ t \in [\gamma,\delta].$$

Будем предполагать, что здесь все функции непрерывны.

Действительно, зададим узлы аппроксимации $\tau_j \in [\alpha, \beta]$, $j = 1 \mathinner{..} N$ и $t_k \in [\gamma, \delta]$, $k = 1 \mathinner{..} M$. Заменим интегралы на суммы вида

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\, d\tau \approx \sum_{j=1}^{N} r_j\, f(\tau_j), \qquad \int\limits_{\gamma}^{\delta} g(t)\, dt \approx \sum_{k=1}^{M} s_k\, g(t_k),$$

здесь r_j и s_k – (неотрицательные) коэффициенты квадратурных формул. Обозначим $x_j = r_j\, x(\tau_j)$, $y_k = s_k\, y(t_k)$ и тогда получим

$$\sum_{j=1}^{N} c(\tau_j)\, x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{N} A(t_k, \tau_j)\, x_j \le b(t_k), \quad k = 1 \mathinner{..} M, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1 \mathinner{..} N,$$

и

$$\sum_{k=1}^{M} b(t_k)\, y_k \to \min,$$

$$\sum_{k=1}^{M} A(t_k, \tau_j)\, y_k \ge c(\tau_j), \quad j = 1 \mathinner{..} N, \quad y_k \ge 0, \quad k = 1 \mathinner{..} M.$$

В качестве примера рассмотрим задачу о распределении силы вдоль упругой струны. Как известно, для струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, отклонение от положения равновесия под действием распределенной силы $p(x)$ вычисляется по формуле

$$u(x) = \int\limits_{0}^{l} G(x,t) p(t)\, dt,$$

где $G(x,t)$ – функция Грина. Пусть нужно найти такое распределение силы вдоль струны при минимальной суммарной нагрузке, чтобы каждая точка струны вышла за пределы некоторой заданной области. Тогда получим задачу интегрального вариационного исчисления

$$\int\limits_{0}^{l} p(t)\, dt \to \min, \quad \int\limits_{0}^{l} G(x,t) p(t)\, dt \ge q(x), \quad p(t) \ge 0.$$

Покажем, как можно обобщить постановки прямой и двойственной задач линейного программирования, чтобы задачи интегрального линейного программирования оказались их частным случаем.

Пусть $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}, \mathrm{Y}'$ – *упорядоченные линейные пространства*, то есть частично упорядоченные множества с операциями сложения и умножения на скаляры, согласованными с упорядоченностью: 1) $x \geq x \quad \forall x$; 2) если $x \geq y, \;\; y \geq z$, то $x \geq z$; 3) если $x \geq y, \; y \geq x$, то $x = y$; 4) если $x \geq y$, то $x + z \geq y + z \;\; \forall z$; 5) если $x \geq 0$ и $\lambda > 0, \; \lambda \in K$, то $\lambda x \geq 0$.

Будем предполагать также, что частичные упорядоченности в X и X' *согласованы* следующим образом: если $x' \geq 0$, то $< x, x' >\geq\, \geq 0 \quad \forall x \in P_X^+$ (здесь P_X^+ — положительный конус в X, т. е. подмножество элементов, удовлетворяющих неравенству $x \geq 0$). Отсюда следует, что если $x'_1 \geq x'_2$, то $< x, x'_1 >\geq< x, x'_2 > \quad \forall x \in P_X^+$. Пусть частичные упорядоченности в Y и Y' также согласованы.

Легко видеть, задачи интегрального линейного программирования вкладываются в общую схему, состоящую из пары задач *абстрактного линейного программирования*: *прямой задачи*

$$< x, x'_0 >\longrightarrow \max, \quad Ax \leq y'_0, \quad x \geq 0,$$

и *двойственной задачи*

$$< y, y'_0 >\longrightarrow \min, \quad A'y \geq x'_0, \quad y \geq 0.$$

Для задач линейного программирования в абстрактной постановке остаются в силе многие факты, установленные в конечномерном случае. Докажем два простых утверждения.

19.1. *Если x и y – допустимые элементы, то $< x, x'_0 >\leq< y, y'_0 >$.*

Доказательство. Если $x'_0 \leq A'y$, то $< x, x'_0 >\leq< x, A'y > \quad \forall x \in\, \in P_X^+$. С другой стороны, если $Ax \leq y'_0$, то $< y, Ax >\leq< y, y'_0 > \;\; \forall y \in P_Y^+$. Но по определению двойственного оператора $< x, A'y >=< y, Ax >$. $\bullet$

19.2. *Если x^0 и y^0 – допустимые элементы и $< x^0, x'_0 >=< y^0, y'_0 >$, то x^0 и y^0 – решения прямой и обратной задач.*

Доказательство. Пусть x, y – произвольные допустимые элементы. Как следует из 19.1, $< x, x'_0 >\le< y^0, y'_0 >=< x^0, x'_0 >\le< y, y'_0 >$. •

Предположим, что операторы аппроксимации и интерполяции сохраняют порядок в линейных пространствах: например, если $T_X : \mathrm{X} \to \overline{\mathrm{X}}$, то из $x \ge 0$ следует $\overline{x} = T_X x \ge 0$.

Задачу линейного программирования, аппроксимирующую прямую задачу, поставим следующим образом:

$$< \overline{x}, S'_X x'_0 >\to \max, \quad T_{Y'} A S_X \overline{x} \le T_{Y'} y'_0, \quad \overline{x} \ge 0.$$

Здесь элементы точных пространств заменены на соответствующие им элементы аппроксимирующих пространств, а в качестве аппроксимирующего оператора $\overline{A} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}'}$ выбран оператор естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_{Y'} A S_X$.

Эта задача может быть получена также в результате следующих рассуждений. Будем искать решение прямой задачи в виде $x = S_X \overline{x}$. Получим

$$< S_X \overline{x}, x'_0 >\to \max, \quad A S_X \overline{x} \le y'_0, \quad S_X \overline{x} \ge 0.$$

В функционале перейдем от оператора S_X к двойственному, первое неравенство спроектируем на пространство $\overline{\mathrm{Y}}'$, а второе – заменим на $\overline{x} \ge 0$.

19.3. *При естественной аппроксимации задача, двойственная к задаче, аппроксимирующей прямую задачу, аппроксимирует двойственную задачу.*

Доказательство. Выполним аналогичные действия для двойственной задачи. Будем искать ее решения в виде $y = S_Y \overline{y}$. Из

$$< S_Y \overline{y}, y'_0 >\to \min, \quad A' S_Y \overline{y} \ge x'_0, \quad S_Y \overline{y} \ge 0$$

следует, что

$$< \overline{y}, S'_Y y'_0 >\to \min, \quad T_{X'} A' S_Y \overline{y} \ge T_{X'} x'_0, \quad \overline{y} \ge 0.$$

Легко видеть, что две конечномерные задачи являются двойственными. •

20. Интегральное вариационное исчисление

В классическом вариационном исчислении необходимые условия экстремума интегральных функционалов, подынтегральные выражения которых зависят от искомой функции и ее производных, записываются в виде дифференциальных уравнений.

Построим *интегральное вариационное исчисление* (ИВИ). Заменим операторы дифференцирования на интегральные операторы. Покажем, что в этом случае условия экстремума имеют вид интегральных уравнений.

Рассмотрим *интегральный функционал*

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] = \int\limits_a^b f(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t))\,dt, \quad \text{где} \quad (\mathrm{K}\,x)(t) = \int\limits_a^b k(\tau, t, x(\tau))\,d\tau, \quad t \in [a, b],$$

– *интегральный оператор Урысона.*

Будем предполагать, что заданные функции $f(t, x, y)$, $k(\tau, t, x)$ непрерывны по совокупности переменных. Будем искать экстремумы этого функционала в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ с нормой

$$||x(\cdot)|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Назовем *простейшей задачей ИВИ* экстремальную задачу

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] \to extr, \quad x(\cdot) \in C[a, b].$$

Получим необходимое условие экстремума в простейшей задаче на основании известного принципа: если отойти от точки экстремума, то значение функционала перестает быть оптимальным. В математическом анализе имеет место теорема Ферма: если функция достигает экстремума в точке и дифференцируема, то ее производная равна нулю в этой точке. Для функционалов, зависящих от функций, используется аналогичное понятие – вариация.

Пусть $h(\cdot) \in C[a,b]$. *Первой вариацией* функционала $\mathrm{I}\,[x(\cdot)]$ называется

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot);h(\cdot)] = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\mathrm{I}\,[x(\cdot)+\lambda h(\cdot)] - \mathrm{I}\,[x(\cdot)]}{\lambda}$$

(если этот предел существует). Ясно, что

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot);h(\cdot)] = \frac{d}{d\lambda}\mathrm{I}\,[x(\cdot)+\lambda h(\cdot)]\Big|_{\lambda=0}.$$

Легко видеть, что если $x^0(\cdot)$ – решение простейшей задачи и первая вариация функционала существует, то $\delta\mathrm{I}\,[x^0(\cdot);h(\cdot)] = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C[a,b]$ (*необходимое условие экстремума*).

Справедливы два важных вспомогательных утверждения.

20.1. (основная лемма ИВИ)
Пусть $a(\cdot) \in C[a,b]$. *Если*

$$\int\limits_a^b a(t)\,h(t)\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C[a,b],$$

то $a(t) \equiv 0$.

Это утверждение доказывается тем же способом, что и лемма Лагранжа классического вариационного исчисления. Предположим, что в какой-то точке и, следовательно, в ее окрестности $a(t) \neq 0$. Легко построить непрерывную функцию $h(\cdot)$ так, чтобы интеграл от произведения функций не был равен нулю. •

Аналогом леммы Дюбуа-Реймона является

20.2. *Пусть* $c(\cdot), d(\cdot) \in C[a,b]$, $k(\cdot,\cdot) \in C([a,b]\times[a,b])$. *Если*

$$\int\limits_a^b \Big[c(t)h(t) + d(t)\int\limits_a^b h(\tau)k(\tau,t)\,d\tau\Big]\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C[a,b],$$

то

$$c(t) + \int\limits_a^b d(\tau)k(t,\tau)\,d\tau \equiv 0.$$

Чтобы это доказать, нужно изменить порядок интегрирования в левой части условия и применить утверждение 20.1. •

Теперь получим необходимое условие экстремума в простейшей задаче.

20.3. *Пусть функции* $k(\tau, t, x)$, $\dfrac{\partial k}{\partial x}$, $f(t, x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны по совокупности переменных. Если функция* $x(\cdot)$ *– решение простейшей задачи, то она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), (Kx)(t)) + \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(t, \tau, x(t)) \, \frac{\partial f}{\partial y}(\tau, x(\tau), (Kx)(\tau)) \, d\tau = 0, \quad t \in [a, b].$$

Доказательство. Вычислим первую вариацию функционала

$$\delta \mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t))\, h(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t)) \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(\tau, t, x(\tau))\, h(\tau)\, d\tau\, dt.$$

Изменим порядок интегрирования во втором слагаемом и переобозначим переменные интегрирования. Тогда

$$\delta \mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \int\limits_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t)) +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(t, \tau, x(t))\, \frac{\partial f}{\partial y}(\tau, x(\tau), (\mathrm{K}\,x)(\tau))\, d\tau \Big]\, h(t)\, dt.$$

Приравняем нулю вариацию и применим утверждение 20.1. (Утверждение 20.2 можно было бы использовать еще до перестановки интегралов). •

Замечание. Как и ожидалось, аналогом уравнения Эйлера в простейшей задаче интегрального вариационного исчисления является интегральное уравнение. В отличие от классического вариационного исчисления, при выводе необходимого условия экстремума в простейшей задаче вместо интегрирования по частям используется перестановка интегралов в повторном интеграле. В постановке простейшей задачи ИВИ нет дополнительных условий вида $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.

Замечание. Утверждение 20.3 остается в силе для таких интегральных функционалов и для таких классов функций, когда 1) существует вариация функционала; 2) можно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле; 3) сохраняется утверждение аналога основной леммы вариационного исчисления.

20.4. *Если*

$$(Kx)(t) = \int_a^b x(\tau)\, k(\tau,t)\, d\tau, \quad t \in [a,b],$$

то условие экстремума принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), (Kx)(t)) + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(\tau, x(\tau), (Kx)(\tau))\, k(t,\tau)\, d\tau = 0, \quad t \in [a,b].$$

Если в интегральном операторе K использовать интеграл с переменным верхним пределом (то есть $k(\tau,t) = 0$ при $\tau > t$), то в аналоге уравнения Эйлера будет стоять интеграл с переменным нижним пределом.

20.5. *Если*

$$f(t,x,y) = A(t)x^2 + 2B(t)xy + C(t)y^2 - 2D(t)x - 2E(t)y,$$

то аналог уравнения Эйлера становится линейным интегральным уравнением с симметричным ядром

$$A(t)x(t) + \int_a^b x(\tau)\, L(\tau,t)\, d\tau = g(t), \quad t \in [a,b],$$

где

$$L(\tau,t) = B(\tau)\, k(\tau,t) + B(t)\, k(\tau,t) + \int_a^b C(\xi)\, k(\tau,\xi)\, k(t,\xi)\, d\xi,$$

$$g(t) = D(t) + \int_a^b E(\tau)\, k(t,\tau)\, d\tau.$$

В этом частном случае легко получить следующее утверждение.

20.6. (достаточное условие экстремума)
Пусть функционал в простейшей задаче ИВИ квадратичный и интегральный оператор линейный. Если

$$\int_a^b \Big[A(t)\, h^2(t) + 2B(t)\, h(t)\, (Kh)(t) + C(t)\, (Kh)^2(t)\Big]\, dt \geq 0 \quad \forall h(\cdot) \in C[a,b],$$

то любое решение интегрального уравнения доставляет минимум в простейшей задаче.

Действительно,

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)+h(\cdot)] - \mathrm{I}\,[x(\cdot)] = 2\int_a^b h(t)\Big[A(t)\, x(t) + \int_a^b x(\tau)\, L(\tau,t)\, d\tau - g(t)\Big]\, dt +$$

$$+\int_a^b \Big[A(t)\, h^2(t) + 2B(t)\, h(t)\, (\mathrm{K}\, h)(t) + C(t)\, (\mathrm{K}\, h)^2(t)\Big]\, dt. \bullet$$

Замечание. Если интегральный оператор K имеет *вырожденное ядро*, то и интегральное уравнение имеет вырожденное ядро.

21. Условия разрешимости интегрального уравнения Фредгольма

Напомним, что интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода на отрезке называют уравнение

$$A(t)\, x(t) + \int_a^b x(\tau)\, k(\tau,t)\, d\tau = f(t), \quad t \in [a,b].$$

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции являются непрерывными. Двойственное ему интегральное уравнение

$$A(t)\, y(t) + \int_a^b y(\tau)\, k(t,\tau)\, d\tau = 0, \quad t \in [a,b],$$

называют также уравнением *с транспонированным ядром* (или *союзным* с однородным уравнением Фредгольма).

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] = \int\limits_a^b \Big[A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau - f(t)\Big]^2\,dt \to \min, \quad x(\cdot) \in C[a,b].$$

Эту задачу можно понимать так: найти функцию $x(\cdot)$, при которой левая часть интегрального уравнения

$$(\mathrm{K}\,x)(t) = A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau = f(t), \quad t \in [a,b],$$

наиболее близка (в смысле квадратического среднего) к его правой части. Условие утверждения 20.6 в данном случае выполняется. Поэтому функция $x(\cdot)$ является решением задачи тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b \Big[A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau - f(t)\Big]\,k(\xi,t)\,dt = 0$$

или

$$\mathrm{K}'((\mathrm{K}\,x)(t) - f(t))(\xi) = 0,$$

где

$$(\mathrm{K}'y)(t) = A(t)\,y(t) + \int\limits_a^b y(\tau)\,k(t,\tau)\,d\tau, \qquad t \in [a,b]$$

– транспонированный (союзный) оператор.

Так как функционал выпуклый, то решение $x^0(\cdot)$ экстремальной задачи существует. Следовательно, или $\mathrm{K}\,x^0 = f$, или функция $y = \mathrm{K}\,x^0 - f$ является нетривиальным решением двойственного однородного уравнения $\mathrm{K}'y = 0$. Это – первая теорема Фредгольма (альтернатива Фредгольма).

Рассмотрим подробнее случай, когда двойственное однородное уравнение $\mathrm{K}'y = 0$ имеет ненулевое решение $y(\cdot)$. Тогда, как было установлено выше, $\mathrm{K}\,x^0 = f + y$. Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b [f(t) + y(t)]\,y_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1..n,$$

где $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ – полная система независимых решений однородного двойственного уравнения (третья теорема Фредгольма). Будем считать, что эта система решений ортономирована. Поэтому $y(\cdot) = c_1 y_1(\cdot) + \ldots + c_n y_n(\cdot)$, где

$$c_j = \int_a^b y(t)\, y_j(t)\, dt, \quad j = 1..n.$$

Тогда

$$c_j = -\int_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt, \quad j = 1..n.$$

Следовательно, минимальное значение функционала

$$\min \mathrm{I} = \mathrm{I}\,[x^0(\cdot)] = \int_a^b y^2(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt\Big)^2.$$

Таким образом, значения интегралов

$$\int_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt$$

не только определяют, разрешимо или нет неоднородное линейное интегральное уравнение при заданной правой части, но и показывают, насколько можно приблизить левую часть уравнения к правой части, если уравнение решений не имеет.

22. Изопериметрическая задача интегрального вариационного исчисления

Пусть

$$\mathrm{I}_j[x(\cdot)] = \int_a^b f_j(t, x(t), (K_j x)(t))\, dt, \quad j = 0..m.$$

Рассмотрим *изопериметрическую задачу*

$$\mathrm{I}_0[x(\cdot)] \Longrightarrow \mathrm{extr}, \quad \mathrm{I}_j[x(\cdot)] = c_j,\ j = 1..m, \quad x(\cdot) \in C([a,b]).$$

22.1. (правило множителей Лагранжа)

Пусть все заданные функции и их частные производные непрерывны. Если $x^0(\cdot)$

– решение изопериметрической задачи, то найдутся такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *(не равные нулю одновременно), что* $x^0(\cdot)$ *удовлетворяет интегральному уравнению, составленному для функции*

$$f(t,x,y) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, f_j(t,x,y).$$

Если функционалы $I_j[\cdot]$, $j = 1..m$ *не имеют стационарных точек, то можно считать, что* $\lambda_0 = 1$.

Доказательство. Это утверждение следует из общего правила множителей Лагранжа. •

Пример. Распределение нагрузки вдоль струны.

Пусть концы упругой струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Если вдоль струны распределена сила $p(\cdot)$, то отклонение струны от положения равновесия (рассматриваются только малые отклонения)

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)\, p(\xi)\, d\xi,$$

$$G(x,\xi) = \left\{ \frac{x(l-\xi)}{T_0 l},\ 0 \le x \le \xi, \quad \frac{(l-x)\xi}{T_0 l},\ \xi \le x \le l \right\},$$

T_0 – натяжение ненагруженной струны.

Будем искать такое распределение силы $p(\cdot)$, при котором струна примет форму $u(\cdot)$, наиболее близкую к заданной $u_0(\cdot)$, при условии, что суммарная нагрузка на струну постоянна:

$$\int_0^l \Big[u(x) - u_0(x)\Big]^2 dx \to \min, \qquad \int_0^l p(\xi) d\xi = C.$$

Если подставим выражение $u(\cdot)$ через $p(\cdot)$ в функционал, то получим изопериметрическую задачу ИВИ. В соответствии с утверждением 22.1 необходимые и достаточные условия экстремума имеют вид

$$\frac{\lambda}{2} + \int_0^l p(\xi) H(\xi,x) d\xi = \int_0^l u_0(\xi) G(x,\xi) d\xi, \quad \int_0^l p(\xi) d\xi = C,$$

где λ – множитель Лагранжа,

$$H(\xi, x) = \int\limits_0^l G(x,t)G(t,\xi)dt, \quad \xi, x \in [0, l].$$

В этой задаче функционал

$$\int\limits_0^l p(\xi)\, d\xi$$

не имеет стационарных точек. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода вместе с дополнительным условием могут быть решены численно методом регуляризации А.Н.Тихонова.

Пример. Распределение нагрузки вдоль мембраны.

Пусть упругая мембрана закреплена вдоль сторон прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$. Ее отклонение от положения равновесия под действием распределенной силы $p(\cdot, \cdot)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = p(x, y),$$

$$u = 0, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{при} \ \ x = 0, \ \ x = a, \quad u = 0, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{при} \ \ y = 0, \ \ y = b.$$

Это решение может быть записано в виде

$$u(x, y) = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \Bigg[\frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\, \sin\dfrac{n\pi y}{b}\, \sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\, \sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{\Big(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\Big)^2} \Bigg] p(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

(в квадратных скобках стоит функция Грина задачи, определяющая прогиб мембраны под действием сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке (ξ, η)). Тогда исходная задача может быть сформулирована как изопериметрическая задача ИВИ

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^b [u(x, y) - u_0(x, y)]^2\, dx\, dy \to min, \qquad \int\limits_0^a \int\limits_0^b p(x, y)\, dx\, dy = C.$$

23. Связь с классическим вариационным исчислением

Исследуем связь между задачами классического вариационного исчисления (КВИ) и задачами ИВИ.

Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\,dt \to extr, \quad x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1, \quad x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Введем новую искомую функцию $y(\cdot) = x'(\cdot)$, тогда

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau + x_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Простейшая задача КВИ равносильна изопериметрической задаче ИВИ

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L\Big(t, \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau + x_0, y(t)\Big)dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} y(\tau)d\tau = x_1 - x_0, \quad y(\cdot) \in C([t_0, t_1]).$$

Второй функционал не имеет стационарных точек, поэтому можно выбрать множитель Лагранжа $\lambda_0 = 1$. Тогда необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t, \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau + x_0, y(t)\Big) + \int\limits_{t}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\tau, \int\limits_{t_0}^{\tau} y(\xi)d\xi + x_0, y(\tau)\Big)d\tau + \lambda = 0.$$

При $t = t_1$ найдем значение

$$\lambda = -\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t_1, \int\limits_{t_0}^{t_1} y(\tau)d\tau + x_0, y(t_1)\Big) = -\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t_1, x_1, y(t_1)\Big).$$

Вернемся к старой искомой функции. Получим необходимое условие экстремума (интегральный аналог уравнения Эйлера)

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t_1, x_1, x'(t_1)) + \int\limits_{t}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau = 0.$$

Если потребовать дополнительно, что функция $L(t, x, y)$ имеет непрерывные вторые частные производные, то это уравнение можно переписать в виде

$$\int\limits_{t}^{t_1} \Big[\frac{\partial L}{\partial x}(\tau, x(\tau), x'(\tau)) - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial y}(\tau, x(\tau), x'(\tau))\Big]d\tau = 0.$$

Продифференцируем по t и получим классическое уравнение Эйлера – необходимое условие экстремума в простейшей задаче КВИ.

Легко видеть, что любая задача КВИ приводится к задаче ИВИ с дополнительным изопериметрическим условием.

Уточним, в каких классах можно рассматривать искомые функции.

Пусть устанавлено соответствие между функциями $x(\cdot)$ из некоторого пространства X и функциями $y(\cdot)$ из некоторого пространства Y. Исследуем, как согласованы друг с другом различные способы задания окрестностей элементов в X и Y.

А. Пусть $X = C^1[t_0, t_1]$ и окрестности в пространстве определяются с помощью нормы

$$||x(\cdot)||_{C^1} = \max\Big\{\max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|, \max_{t\in[t_0,t_1]} |x'(t)|\Big\}$$

(слабые окрестности на языке КВИ). В этом случае $Y = C[t_0, t_1]$ и стандартная норма

$$||y(\cdot)||_C = \max_{t\in[t_0,t_1]} |y(t)|$$

задает в пространстве Y окрестности, согласованные с окрестностями в X. Это следует из неравенств:

$$||y(\cdot) - y_0(\cdot)||_C \le ||x(\cdot) - x_0(\cdot)||_{C^1},$$

$$||x(\cdot) - x_0(\cdot)||_{C^1} = \max\Big\{\max_{t\in[t_0,t_1]} |\int\limits_{t_0}^{t} [y(\tau) - y_0(\tau)]d\tau|, \max_{t\in[t_0,t_1]} |y(t) - y_0(t)|\Big\} \le$$

$$\le \max(t_1 - t_0, 1)\; ||y(\cdot) - y_0(\cdot)||_C.$$

Если же окрестности в пространстве $X = C^1[t_0, t_1]$ задает неравенство $||x(\cdot) - x_0(\cdot)||_C < \varepsilon$ (сильные окрестности), то можно определить окрестности в пространстве $Y = C[t_0, t_1]$ так: $||y(\cdot) - y_0(\cdot)||_C < \varepsilon$. В этом случае, если $y(\cdot)$ – решение экстремальной задачи в Y, то $x(\cdot)$ – решение экстремальной задачи в X, но не наоборот.

Б. Аналогичная ситуация имеет место, если $X = AC[t_0, t_1]$ (пространство абсолютно непрерывных функций) и $Y = L_1(t_0, t_1)$. Пусть

$$||y(\cdot) - y^0(\cdot)||_{L_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} |y(t) - y^0(t)|\, dt,$$

$$||x(\cdot) - x^0(\cdot)||_{AC} = |x(t_0) - x^0(t_0)| + ||x'(\cdot) - (x^0)'(\cdot)||_{L_1}.$$

Определенные таким способом окрестности согласованы, так как

$$||y(\cdot) - y^0(\cdot)||_{L_1} = ||x'(\cdot) - (x^0)'(\cdot)||_{L_1} \leq ||x(\cdot) - x^0(\cdot)||_{AC},$$

$$||x(\cdot) - x^0(\cdot)||_{AC} = ||y(\cdot) - y^0(\cdot)||_{L_1}.$$

Пример. Рассмотрим *пример Гильберта*

$$\int\limits_0^1 t^{2/3}[x'(t)]^2 dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

который показывает, что в задачах КВИ пространство C^1 является слишком узким.

Введем новую искомую функцию $y(t) = x'(t)$ и будем искать решения изопериметрической задачи ИВИ в пространстве AC. Необходимое условие экстремума

$$2t^{2/3}y(t) + \lambda = 0,$$

из изопериметрического условия находим $\lambda = -2/3$ и тогда $y(t) = \dfrac{1}{3}t^{-2/3}$. Следовательно, $x(t) = t^{1/3}$ – функция из L.

24. Дифференцирование отображений

Вычисление первой вариации функционала – одна из простых операций дифференцирования. Рассмотрим другие определения производных отображений.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $x^0 \in X$, U – окрестность x^0 в X, отображение $f\,:\,U \to Y, \quad U \subset D(f)$.

1. Пусть $h \in X$. Если существует предел

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x^0 + \lambda\, h) - f(x^0)}{\lambda},$$

то он называется *производной отображения* f *на элементе* x^0 *по направлению* h и обозначается $f'(x^0; h)$ (здесь $f'(x^0; h)$ – элемент пространства Y).

2. Если $\forall h \in X$ существует $f'(x^0; h)$, то отображение $\delta f(x^0; \cdot) \;:\; h \in X \mapsto f'(x^0; h) \in Y$ называется *первой вариацией отображения* f *на элементе* x^0, а при $f'(x^0; -h) = -f'(x^0; h)$ – первой вариацией по Лагранжу.

3. Если A – такое линейное непрерывное отображение (оператор), что

$$f(x^0 + \lambda h) = f(x^0) + \lambda A h + o(\lambda) \;\text{ при }\; \lambda \to 0 \;\; \forall h \in X,$$

то A – *производная Гато* (или *слабая производная*) *отображения* f *на элементе* x^0; обозначается $f'_G(x^0)$.

Это определение равносильно тому, что первая вариация $\delta f(x^0; \cdot)$ является линейным и непрерывным отображением.

4. Если $A \,:\, X \to Y$ – такое линейное непрерывное отображение, что

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + A h + o(||h||) \quad \text{при} \quad ||h|| \to 0,$$

то A – *производная Фреше* (или *сильная производная*) *отображения* f *на элементе* x^0; обозначается $f'(x^0)$.

Отображение дифференцируемо по Фреше тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\;|\;\; ||f(x^0 + h) - f(x^0) - f'(x^0) h|| < \varepsilon ||h|| \;\text{ при }\; ||h|| < \delta.$$

5. Отображение $f \;:\; X \to Y$ называется *строго дифференцируемым* на элементе x^0, если найдется такое линейное непрерывное отображение $A \,:\, X \to Y$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\;|\;\; ||f(x') - f(x'') - A(x' - x'')|| < \varepsilon ||x' - x''||$$

$$\text{при } \; ||x' - x^0|| < \delta, \;\; ||x'' - x^0|| < \delta.$$

Ясно, что A – производная Фреше.

Если отображение дифференцируемо по Фреше на элементе x^0, оно непрерывно на этом элементе.

Если отображение строго дифференцируемо на элементе x^0, оно непрерывно в окрестности этого элемента.

Эти утверждения следуют непосредственно из определений.

Каждое из определений дифференцируемости является более сильным, чем предыдущее.

Пусть A – линейный непрерывный оператор. У аффинного оператора $Ax + b$ производная Гато совпадает с A. Как частный случай имеем: производная линейного непрерывного оператора совпадает с ним самим.

Пусть $A : X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, X – банахово пространство, Y – гильбертово пространство с естественной нормой $||y||^2 = (y, y)$. Вычислим производную функционала $f(x) = ||Ax - b||^2$:

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = (Ax^0 + Ah - b, Ax^0 + Ah - b) - (Ax^0 - b, Ax^0 - b) =$$

$$= 2(Ax^0 - b, Ah) + (Ah, Ah) = 2(A^*(Ax^0 - b), h) + ||Ah||^2 \dots$$

Легко проверить, что сумма отображений дифференцируема, если дифференцируемо каждое слагаемое. Скалярный множитель можно выносить за знак производной.

Приведем без доказательства основные теоремы о дифференцировании отображений.

24.1. (дифференцирование суперпозиции отображений)
Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, U – окрестность x^0 в X, V – окрестность y^0 в Y, $\varphi : U \to V$, $\varphi(x^0) = y^0$, $\psi : V \to Z$, $f = \varphi\,\psi : U \to Z$ – суперпозиция отображений. Если ψ дифференцируемо по Фреше на y^0, а φ дифференцируемо на x^0 в смысле 1. – 4., то и f дифференцируемо в смысле 1. – 4. При этом

$$f'(x^0) = \psi'(y^0) \circ \varphi'(x^0) \quad \text{или} \quad f'(x^0; h) = \psi'(y^0)(\varphi'(x^0; h)).$$

Если отображения φ и ψ строго дифференцируемы, то и отображение f строго дифференцируемо.

Отрезок в линейном пространстве определяется так: $[a,b] = \{x \mid x = a + t(b-a),\ \ 0 \le t \le 1\}$.

24.2. *Пусть X, Y – нормированные пространства и открытое множество $U \subset X$ содержит отрезок $[a,b]$. Если отображение $f : U \to Y$ дифференцируемо по Гато на каждом элементе $x \in [a,b]$, то*

$$||f(b) - f(a)|| \le \sup_{c\in(a,b)} ||f'_G(c)|| \cdot ||b-a||.$$

24.3. *Пусть выполнены условия предыдущего утверждения и $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда*

$$||f(b) - f(a) - \Lambda(b-a)|| \le \sup_{c\in(a,b)} ||f'_G(c) - \Lambda|| \cdot ||b-a||.$$

Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $x^0 \in X$, U – окрестность x^0 в X, $f : X \to Y \times Z$, $U \subset D(f)$. Иными словами, $f = (g,h) \mid g : X \to Y$, $h : X \to Z$ – вектор-отображение, которое $x \in X$ ставит в соответствие $(g(x), h(x)) \in Y \times Z$.

24.4. *Отображение $f = (g,h)$ дифференцируемо на элементе x^0 в смысле 1. – 5. тогда и только тогда, когда отображения g и h дифференцируемы на x^0 в том же смысле. При этом*

$$f'(x^0;h) = (g'(x^0;h), h'(x^0;h)) \quad \ldots \quad f'(x^0) = (g'(x^0), h'(x^0)).$$

Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$, U – окрестность (x^0, y^0) в $X \times Y$, $f : X \times Y \to Z$, $U \subset D(f)$.

Если отображение $x \mapsto f(x, y^0)$ дифференцируемо на элементе x^0 (по Гато, по Фреше или строго), то его производная называется *частной производной* по x отображения f на элементе (x^0, y^0) и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)$. Аналогично определяется $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)$.

24.5. (о полном дифференциале)
Пусть отображение $f : X \times Y \to Z$ имеет на каждом элементе $(x, y) \in X \times Y$ частные производные по Гато $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
Если отображения $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывны на элементе (x^0, y^0), то отображение f строго дифференцируемо на (x^0, y^0) и

$$f'(x^0, y^0)(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\,\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\,\eta.$$

Теперь легко доказать, что рассмотренные в задачах ИВИ функционалы дифференцируемы, если участвующие в них функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Для этого каждый функционал, например,

$$F[x(\cdot)] = \int_a^b f\Big(t, x(t), \int_a^b k(\tau, t, x(\tau))\, d\tau\Big)\, dt$$

нужно рассматривать как суперпозицию нескольких отображений.

Условия экстремума функционалов очень похожи на привычные условия экстремума обычных функций.

Пусть X – нормированное (топологическое) пространство, $x^0 \in X$, U – окрестность x^0 в X, функционал $f : U \to R^1$, $\ U \subset D(f)$. Говорят, что элемент x^0 *доставляет минимум* функционалу $f(\cdot)$, если $f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in U$. Обозначение: $x^0 \in \mathrm{loc\,min}\, f(\cdot)$.

24.6. (необходимое условие экстремума 1-го порядка)
Если $x^0 \in loc\ min\, f(\cdot)$ и функционал $f(\cdot)$ имеет на элементе x^0 или производную по направлению h, или 1-ю вариацию по Лагранжу, или производную Гато (Фреше), то или $f'(x^0; h) \geq 0$, или $\delta f(x^0; h) = 0 \quad \forall h \in X$, или $f'_G(x^0) = 0$ $(f'(x^0) = 0)$.

Все следует из определений дифференцируемости.

Эта теорема – аналог теоремы Ферма классического анализа: если дифференцируемая функция имеет экстремум в точке, то ее производная обращается в нуль в этой точке.

Определим *вторые производные* отображений. Для производных по направлению

$$f''(x^0; h) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f'(x^0 + \lambda\, h; h) - f'(x^0; h)}{\lambda}.$$

(Мы пишем одно h в производной, но на самом деле их два.)

24.7. (формула Тейлора)
Если отображение $f(\cdot)$ имеет производную Фреше порядка n, то

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + f'(x^0)\, h + \frac{1}{2!}\, f''(x^0)\,(h, h) + \ldots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x^0)\,(h, h, \ldots, h) +$$
$$+\alpha(h)\, ||h||^n, \qquad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0.$$

Доказательство проводится по индукции.

Для вариаций отображений

$$\delta^n f(x^0; h) = \frac{d^n}{d\lambda^n}\, f(x^0 + \lambda h)\Big|_{\lambda=0}.$$

24.8. (необходимое условие экстремума 2-го порядка)
Пусть $x^0 \in loc\ min f(\cdot)$. Если функционал $f(\cdot)$ имеет на элементе x^0 или 2-ю вариацию по Лагранжу, или 2-ю производную Гато (Фреше), то или $\delta^2 f(x^0; h) \geq 0 \quad \forall h \in X$, или $f''_G(x^0)(h, h) \geq 0$ ($f''(x^0)(h, h) \geq 0$) $\quad \forall h \in X$.

Доказательство также основано на формуле Тейлора.

24.9. (достаточное условие экстремума 2-го порядка)
Пусть функционал $f(\cdot)$ имеет на элементе x^0 2-ю производную Фреше. Если $f'(x^0) = 0$ и найдется такое число $\alpha > 0$, что

$$f''(x^0)(h, h) \geq \alpha\, ||h||^2 \quad \forall h \in X,$$

то $x^0 \in loc\ minf(\cdot)$.

Доказательство также проводится с помощью формулы Тейлора.

Пример. Пусть X, Y – гильбертовы пространства, $A : X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, $f(x) = ||Ax - y||^2 = (Ax - y, Ax - y)$. Вычислим производные этого функционала.

Так как

$$f(x+h) - f(x) = 2(Ax - y, Ah) + (Ah, Ah)$$

и

$$(Ax - y, Ah) = (A^*(Ax - y), h), \qquad (Ah, Ah) = ||Ah||^2 \leq ||A||^2||h||^2,$$

то можно считать, что $f'(x) = 2A^*(Ax - y)$. Тогда 2-я производная – $2A^*A$.

25. Необходимое условие экстремума в общей экстремальной задаче

Получим необходимое условие экстремума 1-го порядка в общей экстремальной задаче и определим, когда это условие может быть записано в форме интегрального уравнения. Также исследуем возможность представления дифференцируемого оператора или дифференцируемого функционала в интегральной форме.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $\mathrm{K} : X \to Y$ – дифференцируемый по Гато или Фреше оператор, $\mathrm{J} : X \times Y \to R^1$ – дифференцируемый по Фреше функционал. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\mathrm{J}\left(x, \mathrm{K}\left(x\right)\right) \to \mathrm{extr}, \quad x \in X.$$

К этой задаче приводится, например, задача оптимального управления с уравнением состояний в форме операторного уравнения без дополнительных ограничений на управление

$$\mathrm{J}\left(x, u\right) \to \mathrm{extr}, \quad \mathrm{K}\left(x\right) = u, \quad x \in X, u \in Y.$$

25.1. *Если элемент $x^0 \in X$ – решение экстремальной задачи, то*

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)) + \mathrm{K}\,'(x^0)^*(\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0))) = 0.$$

Доказательство. Пусть элемент $x^0 \in X$ доставляет экстремум. Вычислим производную функционала $\mathrm{J}\,[\cdot]$ на элементе x^0:

$$\langle \mathrm{J}\,'(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)), h\rangle =$$

$$\langle\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x}(x^0, \mathrm{K}\,(X^0)), h\rangle + \langle\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)), \mathrm{K}\,'(x^0)(h)\rangle,$$

Так как по определению сопряженного (двойственного) оператора

$$\langle\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)), \mathrm{K}\,'(x^0)(h)\rangle = \langle \mathrm{K}\,'(x^0)^*(\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)), h\rangle,$$

то, применяя теорему Ферма, получим условие экстремума. Это равенство следует понимать так: стоящий в левой части элемент совпадает с нулевым элементом сопряженного пространства X^*. •

Простейшая задача классического ВИ и простейшая задача ИВИ – два частных случая общей экстремальной задачи. Необходимое условие экстремума в простейшей задаче ИВИ в форме нелинейного интегрального уравнения может быть получено непосредственно отсюда.

Рассмотрим теперь вопрос: когда необходимое условие экстремума может быть записано в форме интегрального уравнения?

Пусть $(S, \Sigma_S, \mu), (T, \Sigma_T, \nu)$ - пространства с мерами, X, Y - произвольные банаховы пространства, X, Y - банаховы пространства отображений $x(\cdot) : S \to X$ и $y(\cdot) : S \to Y$ соответственно. Далее, пусть отображение $k : X \to L_1(T, \Sigma_T, \nu, Y)$ дифференцируемо по Гато или Фреше, отображение $f : X \times Y \to L_1(S, \Sigma_S, \mu, R^1)$ дифференцируемо по Фреше и имеет непрерывные частные производные. Рассмотрим интегральный функционал

$$\mathrm{I}\,(x(\cdot)) = \int\limits_S f(x(\cdot), \mathrm{K}\,(x(\cdot)))(s)\mu(ds),$$

где

$$\mathrm{K}\,(x(\cdot)) = \int\limits_T k(x(\cdot))(t)\mu(dt).$$

25.2. *Если сопряженный оператор $K'(x^0)^*$ является интегральным, то необходимое условие экстремума функционала (3), (4) может быть записано в форме интегрального уравнения.*

Доказательство. Приравняем нулю производную функционала и получим, как частный случай,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0)) + \mathrm{K}\,'(x^0)^*(\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, \mathrm{K}\,(x^0))) = 0.$$

Это уравнение будет интегральным уравнением, в общем случае нелинейным, если является интегральным сопряженный оператор $\mathrm{K}\,'(x^0)^*$. Последнее, как известно, выполняется не всегда. •

Рассмотрим в качестве примера задачу

$$\int\limits_0^1 f(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t))dt \to \mathrm{extr}, \quad (\mathrm{K}\,x)(t) = \int\limits_0^1 k(\tau, t, x(\tau))d\tau.$$

Если функция $k(\tau, t, x)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по x, причем

$$\Big|\frac{\partial k}{\partial x}(\tau, t, x)\Big| \le M\,|x|^{p-2} + N, \quad p \ge 2, \quad 0 < \tau, t < 1, \quad -\infty < x < \infty,$$

то оператор K действует из $L_p(0,1)$ в $L_q(0,1)$, $q \ge 1$, дифференцируем и его производная

$$(\mathrm{K}\,'x)(h(\cdot))(t) = \int\limits_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(\tau, t, x(\tau))h(\tau)d\tau.$$

В этом случае сопряженный оператор

$$(\mathrm{K}\,'x)^*(y(\cdot))(t) = \int\limits_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(t, \tau, x(t))y(\tau)d\tau$$

также является интегральным. Если функция $f(t,x,y)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, то необходимое условие экстремума примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^0(t), (\mathrm{K}\, x^0)(t)) + \int\limits_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(t,\tau,x^0(t))\frac{\partial f}{\partial y}(\tau, x^0(\tau), (\mathrm{K}\, x^0)(\tau))d\tau = 0.$$

Интегралы рассматриваемого вида образуют достаточно широкое подмножество в множестве всех дифференцируемых функционалов $\mathrm{J}\,(x, \mathrm{K}\,(x))$. Исследуем, в каком случае дифференцируемый функционал является интегральным, то есть может быть записан в интегральной форме.

Пусть (S, Σ, μ) - пространство с мерой, X, Y - банаховы пространства вещественнозначных функций на S.

25.3. *Пусть любой линейный непрерывный оператор, действующий из X в $Y \subset L_1(S,\Sigma,\mu,R^1)$ является интегральным. Дифференцируемый по Гато или Фреше оператор является интегральным, если его производная радиально непрерывна.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathrm{F}\,: X \to Y$ дифференцируем по Гато или Фреше и его производная радиально непрерывна. Тогда

$$\mathrm{F}\,(x(\cdot)) = \mathrm{F}\,(0(\cdot)) + \int\limits_0^1 \mathrm{F}\,'(tx(\cdot))(x(\cdot))dt.$$

Так как производная - линейный непрерывный оператор, то

$$\mathrm{F}\,'(x(\cdot))(h(\cdot)) = \int\limits_S f(x(\cdot))(s)h(s)\mu(ds).$$

Переставим интегралы и получим

$$\mathrm{F}\,(x(\cdot)) = \mathrm{F}\,(0(\cdot)) + \int\limits_S \Big(x(s)\int\limits_0^1 f(tx(\cdot))(s)dt\Big)\mu(ds).$$

Таким образом, оператор с радиально непрерывной производной является интегральным. Аналогичное утверждение имеет место и для функционалов.

В качестве пространств X и Y можно брать, например, $L_1(S, \Sigma, \mu, R^1)$ и $L_p(S, \Sigma, \mu, R^1)$, $p > 1$.

* * *

В заключение несколько слов об использованных литературных источниках. Основные определения и терминология согласованы с учебниками [1] и [2]. Теория двойственности и операторов Нетера даны по работам [3] и [4]. Материал главы 4 в основном соответствует учебному пособию [5]. Интегральное вариационное исчисление было построено в работах [6], [7]. Теория дифференцирования отображений изложена по книге [8].

Литература

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

3. Плещинский Н. Б. Теория двойственности и операторы Нетера // Препринт ПМФ-09-01. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2009. – 30 с.

4. Pleshchinskii N. B. Duality theory and Noether operators // Proc. of Int. Conf. "Integral Equations – 2010 25-27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P.112-116.

5. Плещинский Н. Б. Абстрактные приближенные схемы: учебное пособие. Казань: – Казанский университет, 2012. – 80 с.

6. Pleshchinskii N.B. Zur Optimierung einer Klasse von Integralfunctionalen im Raum der stetigen Funktionen // Math. Nachr. – 1988. – 136. – C.69-79.

7. Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения как необходимое условие экстремума интегральных функционалов // Вестник МГУ. Сер. 15. – 1988. – N4. – С.63-64.

8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

Оглавление