

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

*Кафедра прикладной математики*

Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Учебное пособие

Казань – 2022

УДК 517.95, 537.8

ББК 22.313

*Публикуется по решению  
учебно-методической комиссии ИВМиИТ  
протокол №5 от 24 февраля 2022 года*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры мат. физики МГУ **А.С. Ильинский**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры прикладной математики КФУ **Д.Н. Тумаков**

**Плещинский Н.Б.**

**Распространение и дифракция электромагнитных волн:**  
Учебное пособие / Н.Б. Плещинский. – Казань: Казанский федеральный университет, 2022. – 80 с.

Рассмотрены основы теории распространения и дифракции электромагнитных волн, постановки и методы решения ключевых задач.

Для бакалавров и магистрантов математических институтов и факультетов, изучающих теорию и методы решения задач волновой электродинамики.

© Плещинский Н.Б., 2022

© Казанский университет, 2022

## Предисловие

В учебное пособие вошли основные темы курсов лекций "Модели и методы волноводной электродинамики" и "Распространение и дифракция электромагнитных волн", которые автор читает студентам Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

Главная цель этих лекций – показать основные подходы к исследованию физических задач математическими методами и подготовить слушателей к решению задач вычислительной электродинамики, которые могут быть предложены в качестве курсовых и выпускных работ. Особое внимание уделено построению расчетных алгоритмов и оценке достоверности результатов вычислительного эксперимента. Чтобы не увеличивать объем материала, обоснование правомерности математических операций не приводится.

Обозначения и некоторые формулировки утверждений не всегда точно такие, как на лекциях. Используются отдельные фрагменты учебного пособия "Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики. – Казанский государственный университет, 2008". Исправлены неточности и опечатки. Различные методы и алгоритмы решения некоторых конкретных задач волноводной электродинамики были предложены в работах автора пособия и его коллег.

*PNB*

# 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

*Электромагнитное поле* – это физическое понятие, которое помогает объяснить явления электрической и магнитной природы. Оно определяется как поле сил, действующих на пробные заряды и токи.

## 1.1. Уравнения Максвелла

В классической электродинамике электромагнитное поле описывают *четыре векторнозначные функции*  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{V}$ , зависящие от пространственных координат  $\mathbf{r}$  и от времени  $t$ . Эти функции называются:  $\mathbf{E}$  – *напряженность электрического поля*,  $\mathbf{D}$  – *электрическая индукция*,  $\mathbf{H}$  – *напряженность магнитного поля*,  $\mathbf{V}$  – *магнитная индукция*. В качестве источников поля рассматриваются *заряды и токи*, плотности которых  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  также зависят от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . В простых случаях достаточно использовать только две функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые определяют электрическое поле и магнитное поле.

В 60-е годы XIX века Дж. К. Максвелл предложил записывать связи между составляющими поля в виде системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Эти уравнения остались без изменения до настоящего времени, их называют *уравнениями Максвелла*. До сегодняшнего дня не обнаружено электромагнитных процессов, которые противоречили бы этой системе уравнений.

Уравнения Максвелла можно рассматривать как *аксиомы теории электромагнетизма*. Можно условиться отождествлять электромагнитное поле с векторнозначными функциями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющими системе уравнений Максвелла и, следовательно, хотя и не вполне корректно, говорить, что если мы нашли решение этих уравнений, то нашли электромагнитное поле.

*Свойства среды* задаются с помощью материальных уравнений, устанавливающих зависимости между напряженностями и индукциями поля. В вакууме  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные (физические константы). Эти постоянные имеют разные значения в различных системах физических единиц. В линейном диэлектрике

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – *диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость*. Для однородной и изотропной среды  $\varepsilon$  и  $\mu$  – скалярные постоянные. В анизотропных средах эти величины – матрицы (тензоры). В нелинейных средах напряженности и индукции связаны более сложными уравнениями. В проводящих средах дополнительно используется еще уравнение  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , где  $\sigma$  – проводимость.

## 1.2. Метод комплексных амплитуд

Говорят, что вещественнозначная функция  $A(\mathbf{r}, t)$  *гармонически зависит от времени*, если

$$A(\mathbf{r}, t) = A_c(\mathbf{r}) \cos \omega t + A_s(\mathbf{r}) \sin \omega t,$$

здесь  $\omega$  – круговая частота. В этом случае комплекснозначная функция  $A_c(\mathbf{r}) + iA_s(\mathbf{r})$  называется *комплексной амплитудой* функции  $A(\mathbf{r}, t)$ .

Если, например, вещественнозначные гармонически зависящие от времени функции  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  удовлетворяют уравнению  $\partial A / \partial x = \partial B / \partial t$ , то  $\partial A_c / \partial x = \omega B_s$ ,  $\partial A_s / \partial x = -\omega B_c$ . Первое равенство сложим со вторым, умноженным на  $i$ , и получим для комплексных амплитуд уравнение  $\partial(A_c + iA_s) = -i\omega(B_c + iB_s)$ . Таким образом, при гармонической зависимости функций от времени при переходе к их комплексным амплитудам производные по  $t$  заменяются на умножение на  $-i\omega$ .

Гармонически зависящую от времени вещественнозначную функцию можно восстановить по ее комплексной амплитуде так: нужно умножить комплексную амплитуду на  $e^{-i\omega t}$  и вычислить вещественную часть произведения. Можно было бы в качестве комплексной амплитуды функции  $A(\mathbf{r}, t)$  рассматривать комплексно сопряженное выражение  $A_c(\mathbf{r}) - iA_s(\mathbf{r})$ . Тогда для вычисления вещественнозначных амплитуд нужно использовать множитель  $e^{i\omega t}$ .

В дальнейшем будем рассматривать уравнения Максвелла при следующих предположениях:

- 1)  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$  (свободные токи и заряды отсутствуют);
- 2) среда линейная, однородная и изотропная (величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  – вещественные постоянные скаляры);
- 3) компоненты электромагнитного поля гармонически зависят от времени.

Перейдем к комплексным амплитудам векторных функций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (обозначения оставим старые, но будем помнить, как от комплексных амплитуд функций можно, если это необходимо, вернуться к функциям, гармонически зависящим от времени). Получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu \mathbf{H}.$$

Так как  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ , то любое решение этих уравнений удовлетворяет и оставшимся уравнениям Максвелла. Поэтому достаточно искать решения только первых двух уравнений Максвелла для комплексных амплитуд.

*Электромагнитными волнами* будем называть распространяющиеся в пространстве колебания (в окрестности некоторых значений) характеристик электромагнитного поля. В дальнейшем изучение свойств гармонических электромагнитных волн будет основано на исследовании решений уравнений Максвелла для комплексных амплитуд.

### 1.3. Условия сопряжения и граничные условия

На границе раздела двух сред значения  $\varepsilon$  и  $\mu$  не определены и, следовательно, уравнения Максвелла теряют смысл. Эту потерю компенсируют необходимые *условия сопряжения*

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0, & (\mu_1 \mathbf{H}_1 - \mu_2 \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] &= 0, & [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] &= 0\end{aligned}$$

(свободные токи и заряды отсутствуют). Здесь  $\mathbf{n}$  – нормаль к граничной поверхности. Эти условия "потерялись" при переходе от интегральной формы уравнений Максвелла к дифференциальной форме.

Достаточными для однозначного определения поля являются следующие два условия.

I. *На границе раздела сред должны быть непрерывны касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (условие сопряжения).*

II. *На границе с идеально проводящей средой (то есть с металлом) должны быть равны нулю касательные составляющие вектора  $\mathbf{E}$  (граничные условия).*

### 1.4. Энергия электромагнитного поля

*Энергетические характеристики* электромагнитного поля можно ввести двумя способами: или исходя из физического смысла уравнений Максвелла, или аксиоматически.

*Плотность энергии* электромагнитного поля определяется так:

$$w(r, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

Тогда энергия, сосредоточенная в области  $V$ , вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv.$$

*Плотность потока энергии электромагнитного поля имеет вид*

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}],$$

эту величину называют *вектор Пойнтинга*. Здесь в правой части стоят вещественнозначные векторные функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . *Закон сохранения энергии* сводится к следующему: изменение энергии электромагнитного поля в области без источников происходит только за счет перетока энергии через границу.

При гармонической зависимости от времени значения скалярных величин и направления векторов меняются периодически с периодом  $T = 2\pi/\omega$ . Поэтому используют их *средние значения* (усредненные по времени). Для функции  $f(t)$  среднее значение вычисляется по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Легко проверить, например, что *среднее значение вектора Пойнтинга*

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*].$$

Здесь в правой части стоят комплексные амплитуды функций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , знаком \* отмечено комплексно сопряженное выражение.

Итак, физической задаче об определении электромагнитного поля в некоторой области соответствует *математическая модель*: найти решения уравнений Максвелла в этой области, удовлетворяющие граничным условиям на границах идеально проводящих тел и условиям сопряжения на границах раздела диэлектрических сред.

В неограниченных областях нужно также *учитывать условия на бесконечности*, которые будут обсуждаться позже.

В электродинамике, как и в других разделах математической физики, важно не только теоретически исследовать построенную ма-



тематическую модель, но также построить на ее основе расчетный алгоритм, провести вычислительный эксперимент и дать физическую интерпретацию результатам счета.

## 2. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ.

### ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ

Элементарные электромагнитные волны (простые частные решения уравнений Максвелла) можно построить различными способами.

#### 2.1. Двумерное электромагнитное поле

Найдем частные решения уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu \mathbf{H}$$

в декартовых координатах  $(x, y, z)$ . Так как

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right),$$

то имеем шесть скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega\mu_0\mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

Предположим дополнительно, что компоненты поля не зависят от координаты  $y$  (плоское или двумерное поле). Тогда уравнения Максвелла распадаются на две независимые подсистемы уравнений, и любое их решение является суммой двух решений вида  $(0, E_y, 0)$ ,

$(H_x, 0, H_z)$  и  $(E_x, 0, E_z)$ ,  $(0, H_y, 0)$ . Решениям первого типа соответствуют гармонические электромагнитные волны *параллельной поляризации* (вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси  $y$ ), а решениям второго типа – волны *перпендикулярной поляризации*.

В случае параллельной поляризации поля

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x},$$

где *потенциальная функция*  $u$  должна удовлетворять *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0,$$

$k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon$ ,  $k$  – *волновое число*.

Функция  $u(x, z) = A e^{i\xi x + i\zeta z}$  будет решением уравнения Гельмгольца тогда и только тогда, когда  $\xi^2 + \zeta^2 = k^2$ . Если  $\xi$  и  $\zeta$  – вещественные неотрицательные числа, то найдется такое число  $\theta \in [0, \pi/2]$ , что  $\xi = k \sin \theta$ ,  $\zeta = k \cos \theta$ .

Вычислим среднее значение вектора Пойнтинга

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E, H^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_y H_z^*, 0, -E_y H_x^*) = \\ &= \frac{k}{2\omega\mu_0\mu} |A|^2 (\sin \theta, 0, \cos \theta). \end{aligned}$$

Следовательно, потенциальная функция

$$u(x, z) = A e^{ik \sin \theta \cdot x + ik \cos \theta \cdot z}$$

определяет электромагнитную волну, переносящую энергию в направлении  $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ , то есть в первый квадрант плоскости  $(x, z)$  под углом  $\theta$  к оси  $z$ . Потенциальная функция

$$u(x, z) = A e^{-ik \sin \theta \cdot x - ik \cos \theta \cdot z}$$

определяет волну, переносящую энергию в противоположном направлении.

Для краткости речи будем называть волнами потенциальные функции вида  $A e^{\pm i\xi x \pm i\zeta z}$ . Такие волны при вещественных  $\xi$  и  $\zeta$  являются *плоскими*, так как поверхности  $\pm\xi x \pm \zeta z = \text{const}$  (*фронт волны*) – плоскости. С течением времени фронт волны как бы движется, причем в направлении вектора Пойнтинга.

Если одно из чисел  $\xi$  или  $\zeta$  не является вещественным, то такая волна является *затухающей* в направлении одной из осей.

Случай параллельной поляризации рассматривается аналогично.

## 2.2. Отражение и преломление плоской волны на плоской границе раздела сред

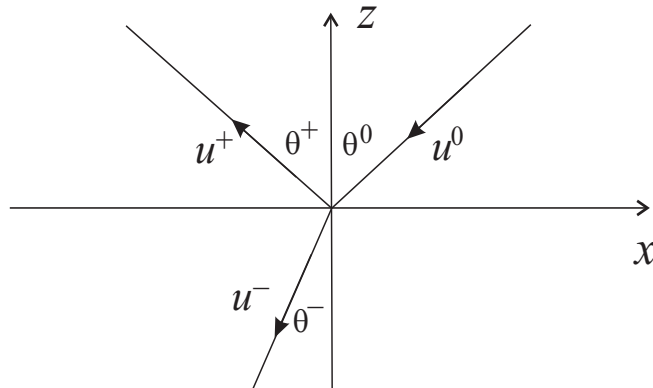


Рис. 2.1. Отражение и преломление плоской волны

Пусть плоскость  $z = 0$  разделяет две среды с разными свойствами: при  $z > 0$  волновое число  $k = k_+$ , при  $z < 0$  волновое число  $k = k_-$ . Пусть на границу раздела сред падает сверху плоская параллельно поляризованная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = A^0 e^{-ik_+ \sin \theta^0 \cdot x - ik_+ \cos \theta^0 \cdot z}$$

(будем стараться соблюдать правило: номер среды указывается снизу, а номер волны – сверху). Будем искать отраженные и преломленные волны, тоже плоские и параллельно поляризованные:

$$u^+(x, z) = A^+ e^{-ik_+ \sin \theta^+ \cdot x + ik_+ \cos \theta^+ \cdot z},$$

$$u^-(x, z) = A^- e^{-ik_- \sin \theta^- \cdot x - ik_- \cos \theta^- \cdot z}.$$

Пока это предположение – гипотеза. Но можно доказать, что других решений быть не может.

Будем считать в дальнейшем, что  $\mu_+ = \mu_- = \mu$ , но  $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$ . Запишем условия сопряжения на границе раздела сред

$$u^0(x, 0) + u^+(x, 0) = u^-(x, 0), \quad \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^+}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(x, 0).$$

Условия сопряжения будут выполнены при всех значения  $x$ , если

$$k_+ \sin \theta^0 = k_+ \sin \theta^+ = k_- \sin \theta^-.$$

Отсюда следует, что угол отражения равен углу падения и угол преломления выражается через угол падения и диэлектрические проницаемости сред (*законы Снелля или Снеллиуса*). Тогда для искомым амплитуд плоских волн остаются уравнения

$$A^0 + A^+ = A^-, \quad -k_+ \cos \theta^0 \cdot A^0 + k_+ \cos \theta^+ \cdot A^+ = -k_- \cos \theta^- \cdot A^-.$$

Отсюда (*формулы Френеля*)

$$A^+ = \frac{k_+ \cos \theta^0 - k_- \cos \theta^-}{k_+ \cos \theta^0 + k_- \cos \theta^-} A^0, \quad A^- = \frac{2k_+ \cos \theta^0}{k_+ \cos \theta^0 + k_- \cos \theta^-} A^0$$

или

$$A^+ = \frac{\sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^0 - \sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^-}{\sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^0 + \sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^-} A^0, \quad A^- = \frac{2\sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^0}{\sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^0 + \sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^-} A^0.$$

Проверим, выполняется ли закон сохранения энергии. Рассмотрим потоки векторов Пойнтинга через поверхность  $z = 0$ , а точнее, через ее единичные площадки. Ясно, что при вычислении потока энергии через такие участки плоскости нужно знать только  $z$ -компоненту вектора  $\Pi$ . При этом удобно иметь дело со средними значениями величин.

Для падающей волны

$$\bar{\Pi}_z^0 = -\frac{k_+ |A^0|^2 \cos \theta^0}{2\omega \mu_0 \mu},$$

и для других волн трехлучевой схемы

$$\bar{\Pi}_z^+ = \frac{k_+ |A^+|^2 \cos \theta^+}{2\omega \mu_0 \mu}, \quad \bar{\Pi}_z^- = -\frac{k_- |A^-|^2 \cos \theta^-}{2\omega \mu_0 \mu}.$$

Поток энергии, приходящей сверху на единичную площадку, равен  $\bar{\Pi}_z^0 + \bar{\Pi}_z^+$ , а поток энергии, уходящей вниз, равен  $\bar{\Pi}_z^-$ . Легко проверить, что выполняется равенство

$$-k_+ |A^0|^2 \cos \theta^0 + k_+ |A^+|^2 \cos \theta^+ = -k_- |A^-|^2 \cos \theta^-.$$

В случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля рассуждения точно такие же. При этом

$$H_y = u, \quad E_x = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x},$$

и условия сопряжения на границе раздела сред для потенциальных функций трех волн (падающей, отраженной и преломленной) имеют вид

$$\frac{1}{\varepsilon_+} \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{1}{\varepsilon_+} \frac{\partial u^+}{\partial z}(x, 0) = \frac{1}{\varepsilon_-} \frac{\partial u^-}{\partial z}(x, 0),$$

$$u^0(x, 0) + u^+(x, 0) = u^-(x, 0).$$

Следовательно, если считать, что все волны – плоские, то и в этом случае

$$k_+ \sin \theta^0 = k_+ \sin \theta^+ = k_- \sin \theta^-.$$

Уравнения для определения амплитуд волн и формулы Френеля будут немного иными:

$$A^+ = \frac{\sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^0 - \sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^-}{\sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^0 + \sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^-} A^0, \quad A^- = \frac{2\sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^0}{\sqrt{\varepsilon_-} \cos \theta^0 + \sqrt{\varepsilon_+} \cos \theta^-} A^0.$$

### 3. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ТОНКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЛЕНТЕ

Пусть теперь на границе раздела сред  $z = 0$  вдоль оси  $y$  размещена бесконечно тонкая идеально проводящая лента  $\mathcal{M}$ . Обозначим через  $\mathcal{N}$  оставшуюся часть плоскости  $z = 0$  (см. рис. 5.1). Ограничимся случаем, когда компоненты поля не зависят от координаты  $y$ . В плоскости  $y = 0$  ленте соответствует отрезок, который также будем обозначать через  $\mathcal{M}$ , а дополнение его до всей оси  $x$  – через  $\mathcal{N}$ .

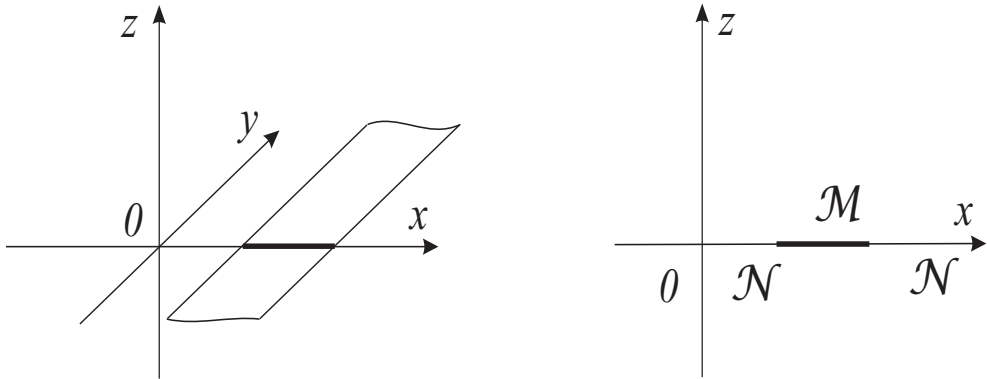


Рис. 3.1. Тонкая проводящая лента

Будем рассматривать *параллельно поляризованные* электромагнитные волны. Ненулевые компоненты поля, как и раньше, выражаются через потенциальную функцию  $u(x, z)$  так:

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Предположим пока, что среды при  $z > 0$  и при  $z < 0$  одинаковы. Пусть электромагнитная волна с потенциальной функцией  $u^0(x, z)$  задана и при  $z > 0$ , и при  $z < 0$  (так можно). Будем искать отраженные вверх волны и прошедшие вниз волны, которым соответствуют потенциальные функции  $u^+(x, z)$  и  $u^-(x, z)$ . На  $\mathcal{N}$  должны быть выполнены условия сопряжения

$$u^0 + u^+ = u^0 + u^-, \quad \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^+}{\partial z} = \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^-}{\partial z},$$

слева и справа есть одинаковые слагаемые. На  $\mathcal{M}$  должны быть выполнены граничные условия

$$u^0 + u^+ = 0, \quad u^0 + u^- = 0.$$

### 3.1. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости

Примем *гипотезу*: отраженное и прошедшее поле являются наложением плоских волн вида

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{-i\xi x \pm i\gamma(\xi)z} d\xi, \quad \gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Пусть значения  $\gamma(\xi)$  вычисляются так, что или это неотрицательные вещественные числа, или мнимые числа с положительной мнимой частью ( $\operatorname{Re} \gamma(\xi) \geq 0$  или  $\operatorname{Im} \gamma(\xi) > 0$ ). При вещественных  $\gamma(\xi) > 0$  энергия переносится вдоль оси  $z$  (или в противоположном направлении), при мнимых  $\gamma(\xi)$  волны затухают. Поэтому будем искать

$$u^+(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi) e^{-i\xi x + i\gamma(\xi)z} d\xi, \quad z > 0,$$

и

$$u^-(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^-(\xi) e^{-i\xi x - i\gamma(\xi)z} d\xi, \quad z < 0,$$

условия на бесконечности здесь учтены.

Напомним, что интегральное преобразование Фурье устанавливает соответствие между функциями  $f(x)$  и  $f(\xi)$ :

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следы (предельные значения) функции  $u(x, z)$  и ее производной по  $z$  при  $z \rightarrow 0$  будем обозначать  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$ . При  $z \rightarrow 0+0$  имеем

$$u_0^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad u_1^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) A^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следовательно,  $\sqrt{2\pi} A^+(\xi) = u_0^+(\xi)$ ,  $\sqrt{2\pi} i\gamma(\xi) A^+(\xi) = u_1^+(\xi)$ . При  $z \rightarrow 0-0$  аналогично. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

*Функции  $u_0^+(x)$  и  $u_1^+(x)$  – следы на прямой  $z = 0$  потенциальной функции положительно ориентированной волны тогда и только тогда, когда*

$$u_1^+(\xi) - i\gamma(\xi) u_0^+(\xi) = 0.$$

*Функции  $u_0^-(x)$  и  $u_1^-(x)$  – следы на прямой  $z = 0$  потенциальной функции отрицательно ориентированной волны тогда и только тогда, когда*

$$u_1^-(\xi) + i\gamma(\xi) u_0^-(\xi) = 0.$$

Эти условия являются условиями разрешимости переопределенных граничных задач для уравнения Гельмгольца в верхней и в нижней полуплоскости: следы ориентированных решений на границе полуплоскости не могут быть заданы произвольно.



### 3.2. Интегральное уравнение задачи дифракции

Теперь легко доказать еще одно утверждение (лемма 2).

*Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна граничной задаче с условиями*

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Так как  $u_0^+(x) = u_0^-(x)$  при всех  $x$ , то  $u_0^+(\xi) = u_0^-(\xi)$ . Тогда  $u_1^+(\xi) = -u_1^-(\xi)$  и  $u_1^+(x) = -u_1^-(x)$ . Поэтому  $u_1^+(x) = 0$  на  $\mathcal{N}$ . •

Из граничных условий на  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  следует, что

*Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) K_1(x_1, x) dx_1 = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

где

$$K_1(x_1, x) = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x - x_1|).$$

Доказательство. Пусть  $u_1^+(x)$  – искомая функция на  $\mathcal{M}$  (на  $\mathcal{N}$  эта функция равна нулю). Тогда

$$\begin{aligned} u_0^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} u_1^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) e^{ix_1\xi} dx_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} e^{-i\xi(x-x_1)} d\xi \right) dx_1 = \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x-x_1|) \right) dx_1$$

(внутренний интеграл вычислен как обратное преобразование Фурье). •

### 3.3. Перпендикулярная поляризация поля

В случае *перпендикулярной поляризации* электромагнитных волн рассуждения аналогичные. Отличие в том, что ненулевые компоненты поля

$$H_y = u, \quad E_x = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x},$$

и граничные условия имеют вид

$$u_1^0 + u_1^+ = 0, \quad u_1^0 + u_1^- = 0.$$

В этом случае

*Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна граничной задаче с условиями*

$$u_1^+(x) = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Так как  $u_1^+(x) = u_1^-(x)$  при всех  $x$ , то  $u_1^+(\xi) = u_1^-(\xi)$ . Тогда  $u_0^+(\xi) = -u_0^-(\xi)$  и  $u_0^+(x) = -u_0^-(x)$ . Поэтому  $u_0^+(x) = 0$  на  $\mathcal{N}$ . •

Из граничных условий на  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  следует, что

*Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) K_0(x_1, x) dx_1 = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

где

$$K_0(x_1, x) = \frac{i}{2} \frac{k}{|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|).$$

Доказательство. Пусть  $u_0^+(x)$  – искомая функция на  $\mathcal{M}$  (на  $\mathcal{N}$  эта функция равна нулю). Тогда

$$\begin{aligned} u_1^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) e^{ix_1\xi} dx_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) e^{-i\xi(x-x_1)} d\xi \right) dx_1 = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) \left( \frac{i}{2} \frac{k}{|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|) \right) dx_1. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл и в этом случае удалось вычислить. •

Отметим, что в случае параллельной поляризации поля ядро интегрального уравнения задачи дифракции имеет логарифмическую особенность, а в случае перпендикулярной поляризации оно является гиперсингулярным.

### 3.4. Задача о скачке

Будем искать ориентированные решения уравнения Гельмгольца  $u^+(x, z)$  при  $z > 0$  и  $u^-(x, z)$  при  $z < 0$ , удовлетворяющие при  $z = 0$  условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0+0) - u(x, 0-0) &= a(x), & \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) &= b(x), \\ & & -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

Предположим, что среды сверху и снизу имеют разные свойства. Докажем следующее утверждение.

Задача о скачке имеет единственное решение

$$u^\pm(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm\gamma^\mp(\xi) a(\xi) - i b(\xi)}{\gamma^-(\xi) + \gamma^+(\xi)} e^{\pm\gamma^\pm(\xi) z - i\xi x} d\xi.$$

Доказательство. Перейдем к образам Фурье в условиях задачи о скачке и добавим к ним условия разрешимости переопределенных задач. Получим СЛАУ

$$\begin{aligned} u_0^+(\xi) - u_0^-(\xi) &= a(\xi), & u_1^+(\xi) - u_1^-(\xi) &= b(\xi), \\ u_1^+(\xi) - i\gamma_+(\xi) u_0^+(\xi) &= 0, & u_1^-(\xi) + i\gamma_-(\xi) u_0^-(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Удобно искать образы Фурье следов в виде

$$u_0^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} a(\xi) + u_0(\xi), \quad u_1^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} b(\xi) + u_1(\xi).$$

Тогда

$$u_0(\xi) = \frac{-\frac{1}{2}(\gamma_+(\xi) - \gamma_-(\xi))a(\xi) - ib(\xi)}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)}$$

и отсюда

$$u_0^\pm(\xi) = \frac{\pm\gamma_\mp(\xi)a(\xi) - ib(\xi)}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)}. \bullet$$

Рассмотрим две задачи об определении параллельно поляризованного электромагнитного поля, при решении которых используется полученное решение задачи о скачке.

**Пример 1.** Отражение и преломление плоской волны на плоской границе раздела сред.

Пусть плоская волна

$$u^0(x, z) = e^{-ik_+ \sin \theta^0 \cdot x - ik_+ \cos \theta^0 \cdot z}.$$

Задача об отражении и преломлении сводится к задаче о скачке при

$$a(x) = -e^{-ik_+ \sin \theta^0 \cdot x}, \quad b(x) = ik_+ \cos \theta^0 \cdot e^{-ik_+ \sin \theta^0 \cdot x}.$$

Образ Фурье этих функций в классическом смысле не существует.

Проверим, что дельта-функция Дирака  $\delta(\xi - \xi_0)$  – такой математический объект, что для любой непрерывной функции  $f(\xi)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = f(\xi_0).$$

Тогда для  $f(\xi) = e^{-i\xi x}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \delta(\xi - \xi_0) d\xi = e^{-i\xi_0 x}.$$

Поэтому образом Фурье функции  $e^{-i\xi_0 x}$  является  $\sqrt{2\pi} \delta(\xi - \xi_0)$ .

На самом деле  $\delta(\xi - \xi_0)$  – распределение (или обобщенная функция).

Следовательно, можно попробовать применить следующее правило. Образы Фурье экспонент записывать как дельта-функции. Если дельта-функция оказывается под знаком интеграла, то значение интеграла – это то, что под знаком интеграла умножается на дельта-функцию, но при  $\xi = \xi_0$ .

В нашем случае  $\xi_0 = k_+ \sin \theta^0$  и

$$a(\xi) = -\sqrt{2\pi} \delta(\xi - \xi_0), \quad b(\xi) = \sqrt{2\pi} i k_+ \cos \theta^0 \cdot \delta(\xi - \xi_0).$$

Подставим эти выражения в формулы, дающие решение задачи о скачке. Получим

$$u^\pm(x, z) = \frac{\mp \gamma_\mp(\xi) + k_+ \cos \theta^0}{\gamma_+(\xi) + \gamma_-(\xi)} e^{\pm \gamma_\pm(\xi) z - i \xi x} \Big|_{\xi = \xi_0}.$$

Легко видеть, что  $\gamma_+(\xi_0) = k_+ \cos \theta^0$ . Пусть  $\theta^-$  – такое число, что  $k_- \sin \theta^- = k_+ \sin \theta^0$ . Тогда, легко видеть,  $\gamma_-(\xi_0) = k_- \cos \theta^-$ . Поэтому решение задачи об отражении и преломлении – две плоские волны

$$u^+(x, z) = \frac{-k_- \cos \theta^- + k_+ \cos \theta^0}{k_- \cos \theta^- + k_+ \cos \theta^0} e^{i k_+ \cos \theta^0 \cdot z - i k_+ \sin \theta^0 \cdot x},$$

$$u^-(x, z) = \frac{2k_+ \cos \theta^0}{k_- \cos \theta^- + k_+ \cos \theta^0} e^{-ik_- \cos \theta^- \cdot z - ik_- \sin \theta^- \cdot x}.$$

**Пример 2.** Задача дифракции электромагнитной волны на ленте.

Пусть среды сверху и снизу одинаковые, тогда  $k_+ = k_-$  и  $\gamma_+(\xi) = \gamma_-(\xi) = \gamma(\xi)$ . Удобно считать, что волна  $u^0(x, z)$  задана и сверху, и снизу. Тогда  $a(x) = 0$  всюду,  $b(x) = 0$  на  $\mathcal{N}$  и остается неизвестной на  $\mathcal{M}$ . Из формул, дающих решение задачи о скачке, следует, что

$$u^\pm(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ib(\xi)}{2\gamma(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Отсюда выводится точно такое же интегральное уравнение, как и в п. 3.2.

Если же среды разные, то будем рассуждать следующим образом. Пусть  $u^{0+}(x, z)$  и  $u^{0-}(x, z)$  – решение задачи об отражении и преломлении волны  $u^0(x, z)$  (см. пример 1). Тогда в задаче дифракции имеем условия:

$$u_0^0(x) + u_0^{0+}(x) + u_0^+(x) = 0, \quad u_0^{0-}(x) + u_0^-(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M},$$

$$u_0^+(x) = u_0^-(x), \quad u_1^+(x) = u_1^-(x) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Таким образом, опять  $a(x) = 0$  всюду,  $b(x) = 0$  на  $\mathcal{N}$  и остается неизвестной на  $\mathcal{M}$ . Из формул, дающих решение задачи о скачке, следует, что

$$u^+(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ib(\xi)}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi = -u_0^0(x) - u_0^{+0}(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Отсюда также выводится интегральное уравнение относительно  $b(x) = 0$  на  $\mathcal{M}$ , но только в этом случае его ядро не удастся записать в явном виде.

В случае перпендикулярной поляризации поля нужно построить решение второй задачи о скачке, когда условия сопряжения при  $z = 0$  имеют вид

$$u(x, 0+0) - u(x, 0-0) = a(x), \quad \frac{1}{\varepsilon_+} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{1}{\varepsilon_-} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) = b(x),$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

#### 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Приближенные решения интегральных уравнений задачи дифракции на тонкой проводящей ленте могут быть найдены методом Галеркина.

##### 4.1. Общая схема метода Галеркина

Общая схема метода Галеркина состоит в следующем. Пусть линейный оператор  $A$  действует из линейного пространства  $X$  в линейное пространство  $Y$ . Выберем в  $D(A) \subset X$  координатную систему  $\{x_j\}_{j=1,2,\dots}$  линейно независимых элементов и в сопряженном пространстве  $Y^*$  — проекционную систему  $\{y_k^*\}_{k=1,2,\dots}$  линейно независимых элементов. Приближенное решение операторного уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

будем искать в виде  $\tilde{x} = \sum_{j=1}^N a_j x_j$ . Числа  $a_j$  подберем так, чтобы выполнялись равенства  $\langle A\tilde{x} - y, y_k^* \rangle = 0$ ,  $k = 1 \dots N$ . Следовательно, (1) ставится в соответствие аппроксимирующая его СЛАУ

$$\sum_{j=1}^N \langle Ax_j, y_k^* \rangle a_j = \langle y, y_k^* \rangle, \quad k = 1 \dots N, \tag{2}$$

а точнее, последовательность аппроксимирующих СЛАУ (приближенная схема).

В общем случае нет оснований утверждать, что последовательность приближенных решений  $\tilde{x}$  сходится при  $N \rightarrow +\infty$  к точному решению. Не ясно также, разрешима или нет система линейных уравнений (2). Нужно провести дополнительные построения.

Пусть  $\{x_j^*\}_{j=1,2,\dots}$  — система элементов сопряженного пространства  $X^*$ , биортогональная системе  $\{x_j\}$ , а  $\{y_k\}_{k=1,2,\dots}$  — система элементов  $Y$ , биортогональная системе  $\{y_k^*\}$ , то есть выполняются равенства  $\langle x_j, x_k^* \rangle = \delta_{kj}$  и  $\langle y_j, y_k^* \rangle = \delta_{kj}$ . Элемент  $x$  заменим на его ряд Галеркина по биортогональной системе  $\sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, x_j^* \rangle x_j$ , здесь числа  $\langle x, x_j^* \rangle$  — коэффициенты Галеркина. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, x_j^* \rangle Ax_j.$$

Приравняем коэффициенты Галеркина элементов  $Ax$  и  $y$  по биортогональной системе  $\{y_k\}$ ,  $\{y_k^*\}$  и получим БСЛАУ относительно коэффициентов Галеркина элемента  $x$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \langle Ax_j, y_k^* \rangle \langle x, x_j^* \rangle = \langle y, y_k^* \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Таким образом, метод Галеркина можно рассматривать как метод усечения БСЛАУ (3).

Удобно считать, что  $X$  и  $Y$  — гильбертовы пространства. Тогда сопряженные пространства  $X^*$  и  $Y^*$  в силу теоремы Ф. Рисса можно отождествить с  $X$  и  $Y$ , а значения функционалов заменить на скалярные произведения:  $\langle x, x_j^* \rangle = (x, x_j^*)$  и  $\langle y, y_k^* \rangle = (y, y_k^*)$ . БСЛАУ (3) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (Ax_j, y_k^*) (x, x_j^*) = (y, y_k^*), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$



Приближенную схему образует последовательность СЛАУ

$$\sum_{j=1}^N (Ax_j, y_k^*) (x, x_j^*) = (y, y_k^*), \quad k = 1 \dots N. \quad (5)$$

Если  $Y = X$ , то одну и ту же систему элементов можно использовать и как координатную, и как проекционную. Кроме того, если эта система ортогональная, то коэффициенты и ряды Галеркина будут также коэффициентами и рядами Фурье.

## 4.2. Интегральное уравнение с логарифмическим ядром

Полиномы Чебышева 1-го рода на отрезке  $[-1, 1]$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

ортогональны с весом

$$\int_{-1}^1 \frac{T_j(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \beta_j = \{k = j = 0 : \pi; \quad k = j \neq 0 : \pi/2; \quad k \neq j : 0\}.$$

Кроме того, полиномы Чебышева 1-го рода являются собственными функциями интегрального оператора с логарифмическим ядром

$$\int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \alpha_j T_j(x),$$

$$\alpha_j = \{j = 0 : \pi \ln 2; \quad j \neq 0 : \pi/j\}.$$

Поэтому, если искать методом Галеркина приближенное решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью в ядре

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) \left[ \ln \frac{1}{|t-x|} + r(t, x) \right] dt = f(x), \quad x \in [-1, +1]$$

в виде

$$\varphi(t) \approx \tilde{\varphi}_N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{j=0}^N a_j T_j(t),$$

то получим для неизвестных  $a_j$ ,  $j = 0..N$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^N a_j (s_{kj} + r_{kj}) = f_k, \quad k = 0..N,$$

$$s_{kj} = \{k = j = 0 : \pi^2 \ln 2; \quad k = j \neq 0 : \frac{\pi^2}{2k}; \quad k \neq j : 0\},$$

$$r_{kj} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r(t, x) \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dt dx, \quad k, j = 0..N,$$

$$f_k = \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0..N.$$

Интегралы удобно вычислять по квадратурной формуле Эрмита (Гаусса)

$$\int_{-1}^1 g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M g(x_m), \quad x_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad m = 1..M,$$

при этом

$$r_{kj} \approx \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M r(x_n, x_m) T_j(x_n) T_k(x_m),$$

$$f_k \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M f(x_m) T_k(x_m), \quad k, j = 0..N.$$

Метод Галеркина устойчиво работает при малых размерах ленты, когда ее ширина существенно меньше длины электромагнитной волны.

### 4.3. Выделение логарифмической особенности в ядре интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение, эквивалентное двумерной задаче дифракции ТЕ-волны на проводящей тонкой ленте,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) H_0^{(1)}(k|t-x|) dt = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , причем  $\beta - \alpha < \lambda$ .

1) Перейдем с отрезка  $[\alpha, \beta]$  на отрезок  $[-1, 1]$ . Пусть

$$t_1 = 2 \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} - 1, \quad t = \frac{\beta - \alpha}{2} t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$$x_1 = 2 \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} - 1, \quad x = \frac{\beta - \alpha}{2} x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{\beta - \alpha}{2} t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) H_0^{(1)}\left(\pi \frac{\beta - \alpha}{\lambda} |t_1 - x_1|\right) \frac{\beta - \alpha}{2} dt_1 = \\ = f\left(\frac{\beta - \alpha}{2} x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right), \quad x_1 \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

2) Выделим логарифмическую особенность из функции Ханкеля,

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$

где

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} [J_0(z) \ln \frac{z}{2} + \tilde{Y}_0(z)], \quad \tilde{Y}_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \psi(k+1),$$

$\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции,

$$\psi(k+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad \gamma = 0.57721566 \dots$$

Так как  $J_0(0) = 1$ , то

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} [\ln \frac{z}{2} + (J_0(z) - 1) \ln \frac{z}{2} + \tilde{Y}_0(z)].$$

Обозначим  $k_1 = \pi(\beta - \alpha)/\lambda$ , тогда

$$H_0^{(1)}(k_1 |t_1 - x_1|) = J_0(k_1 |t_1 - x_1|) +$$

$$+\frac{2i}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1-x_1|\right)+[J_0(k_1|t_1-x_1|)-1]\ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1-x_1|\right)+\widetilde{Y}_0(k_1|t_1-x_1|)\right\}.$$

3) Введем новые обозначения

$$\varphi_1(t_1) = -\frac{i}{\pi}(\beta - \alpha) \varphi\left(\frac{\beta - \alpha}{2} t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{\beta - \alpha}{2} x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$K(t_1, x_1) = \frac{\pi i}{2} J_0(k_1|t_1 - x_1|) - \ln \frac{k_1}{2} - \widetilde{Y}_0(k_1|t_1 - x_1|) + \\ + [1 - J_0(k_1|t_1 - x_1|)] \ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1 - x_1|\right).$$

Получим окончательно

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(t_1) \left[ \ln \frac{1}{|t_1 - x_1|} + K(t_1, x_1) \right] dt_1 = f_1(x_1), \quad x_1 \in [-1, 1].$$

## 5. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Пусть на границе раздела сред  $z = 0$  размещена  $l$ -периодическая решетка из бесконечно тонких идеально проводящих лент. Предположим, что среды над решеткой и под решеткой одинаковы. Сверху на решетку набегают плоская параллельно поляризованная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = e^{-ik \sin \theta^0 \cdot x - ik \cos \theta^0 \cdot z}, \quad z > 0;$$

пусть эта волна задана только над решеткой.

Обозначим через  $\mathcal{M}$  часть отрезка  $[0, l]$ , занятого лентами (или только одной лентой) и через  $\mathcal{N}$  – оставшуюся часть отрезка.

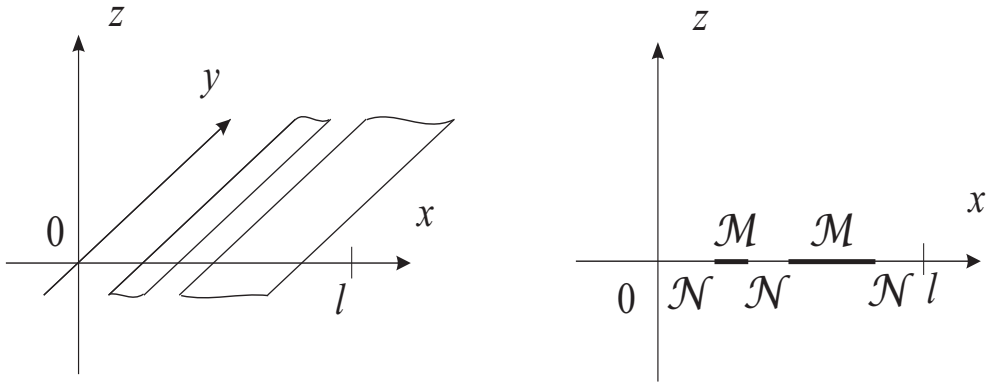


Рис. 5.1. Бесконечная периодическая решетка

### 5.1. Парное сумматорное функциональное уравнение

Как и в случае одной ленты (или конечного числа лент), нужно искать решения уравнения Гельмгольца при  $z > 0$  и при  $z < 0$ , удовлетворяющие граничным условиям на  $\mathcal{M}$  и условиям сопряжения на  $\mathcal{N}$ . Также нужно учитывать условия на бесконечности, то есть искать волны, уходящие на бесконечность от решетки.

Можно доказать, что потенциальные функции отраженной волны и прошедшей волны могут быть только *квазипериодическими функциями* (волнами Флоке) вида

$$u^1(x, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l} nx}, \quad z > 0,$$

$$u^2(x, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l} nx}, \quad z < 0.$$

Здесь

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - (2\pi n/l + \alpha)^2}, \quad \text{Re } \gamma_n > 0 \quad \text{или} \quad \text{Im } \gamma_n > 0.$$

Перейдем от задачи дифракции к парному сумматорному функциональному уравнению, а затем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Задача дифракции эквивалентна парному сумматорному функциональному уравнению

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = -1, \quad x \in \mathcal{M}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Запишем условия сопряжения и граничные условия на прямой  $z = 0$ :

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = 0, \quad u^2(x, 0) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M},$$

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \quad \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Очевидно, параметр Флоке  $\alpha$  должен быть равен  $-k \sin \theta^0$ .

Так как  $u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0)$  и на  $\mathcal{M}$ , и на  $\mathcal{N}$ , то

$$a_n = b_n, \quad n \neq 0, \quad 1 + a_0 = b_0.$$

Исключим неизвестные  $b_n$  и получим ПСФУ.

## 5.2. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Чтобы преобразовать ПСФУ в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, нужно получить одно вспомогательное утверждение.

*Имеет место интегрально-сумматорное тождество*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \int_0^l \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt.$$

Легко проверить, что это равенство выполняется (если, разумеется, сходятся ряды).

ПСФУ сводится к БСЛАУ

$$l a_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Доказательство. Сумма ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

известна на  $\mathcal{M}$  (она равна  $-1$ ). Выражение для этой суммы на  $\mathcal{N}$  получим с помощью ИСТ. Обозначим

$$I_n = \int_{\mathcal{M}} e^{i\frac{2\pi}{l}nx} dx, \quad J_n = \int_{\mathcal{N}} e^{i\frac{2\pi}{l}nx} dx.$$

Эти интегралы вычисляются явно. Тогда на  $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} &= \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}mx} \int_{\mathcal{M}} e^{i\frac{2\pi}{l}(n-m)t} dt = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}mx} I_{n-m}. \end{aligned}$$

По сумме ряда Фурье найдем коэффициент Фурье с номером  $k$ , то есть умножим обе части парного равенства (часть его задана на  $\mathcal{N}$ , другая – на  $\mathcal{M}$ ) на  $e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $l$ . Получим ИСТ.

Приближенное решение БСЛАУ можно найти *методом усечения* (или методом редукции). Нужно оставить конечное число неизвестных, столько же уравнений и решать конечную СЛАУ. При этом в сумме по  $m$  также нужно учитывать только конечное число слагаемых. Конечная СЛАУ имеет вид

$$l a_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-N}^N a_n \gamma_n \sum_{m=-M}^M \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = -N \dots N.$$

Имеем два параметра усечения:  $N$  и  $M$ . Вычислительный эксперимент показал, что  $M$  лучше брать немного большим, чем  $N$  (хотя и не во всех случаях).

Проверка правильности результатов счета сводится чаще всего к трем шагам:

- 1) *внутренняя сходимость* (при увеличении  $N$  последовательность приближенных значений  $a_n$  должна сходиться);
- 2) *закон сохранения энергии* (сколько энергии пришло на плоскость  $z = 0$  с заданной плоской волной, столько и должно уйти с отраженной и прошедшей волнами);
- 3) *предельные случаи* (когда решетка отсутствует или заполняет всю плоскость);
- 4) *граничное условие на металле*.

### 5.3. Закон сохранения энергии

При проверке закона сохранения энергии нужно вычислить потоки энергии трех волн через полосу периода, отнесенных на единицу длины по координате  $y$ , то есть интегралы по отрезку  $[0, l]$  от  $z$ -компоненты среднего по периоду изменения времени значения вектора Пойнтинга  $\bar{\Pi}$ . Сумма потоков энергии отраженной вверх и прошедшей вниз волн должна быть равна потоку энергии волны, падающей на решетку сверху.

Потенциальная функция квазипериодической волны общего вида

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_n e^{i\gamma_n z} + b_n e^{-i\gamma_n z}] e^{i(\alpha + \frac{2\pi}{l}n)x},$$

$z$ -компонента среднего значения вектора Пойнтинга

$$\bar{\Pi}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (-E_y H_x^*) = \frac{1}{2\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \left( i u \frac{\partial u^*}{\partial z} \right)$$

и поток энергии через полосу периода (точнее, поток через прямо-



угольник шириной  $l$  и длиной  $q$ , разделенный на  $q$ )

$$P = \int_0^l \overline{\Pi}_z|_{z=0} dx.$$

Так как

$$i u \frac{\partial u^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n) e^{i(\alpha + \frac{2\pi}{l}n)x} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n_1}^* (a_{n_1}^* - b_{n_1}^*) e^{-i(\alpha + \frac{2\pi}{l}n_1)x},$$

то после интегрирования

$$\begin{aligned} P &= \frac{l}{2\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n) \gamma_n^* (a_n^* - b_n^*) = \\ &= \frac{l}{2\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n^* [|a_n|^2 - |b_n|^2 + 2i \operatorname{Im} (a_n^* b_n)]. \end{aligned}$$

Таким образом, поток энергии квазипериодической волны состоит из трех слагаемых (без общего множителя):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \gamma_n |a_n|^2, \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \gamma_n |b_n|^2, \quad 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \gamma_n \cdot \operatorname{Im} (a_n^* b_n).$$

Первые два выражения определяют потоки энергии гармоник, распространяющихся вверх и вниз соответственно. В этих суммах учитывается фактически только конечное число слагаемых – тех, в которых стоят вещественные множители  $\gamma_n$ . Третье "неудобное" выражение состоит из слагаемых с мнимыми значениями  $\gamma_n$ . Это выражение равно нулю, если в потенциальной функции квазипериодической волны в случае мнимых  $\gamma_n$  или  $a_n = 0$ , или  $b_n = 0$ . Так как в рассматриваемой задаче дифракции на ленты сверху падает плоская волна, то только  $b_0 \neq 0$  и при этом  $\gamma_0 = k \cos \theta^0$  – вещественное число. Поэтому для поля над решеткой поток энергии характеризует величина

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |a_n|^2 - \gamma_0 |b_0|^2.$$

Аналогично, для поля под решеткой

$$- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |b_n|^2.$$

Следовательно, закон сохранения энергии для задачи дифракции имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |a_n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n |b_n|^2 = \gamma_0 |b^0|^2,$$

здесь не поставлен множитель  $\frac{l}{2\omega\mu_0\mu}$  и, напомним, в суммах учитываются только слагаемые с вещественными  $\gamma_n$ . А еще в нашем случае  $b^0 = 1$ .

#### 5.4. Перпендикулярная поляризация поля

Случай *перпендикулярной поляризации* поля рассматривается по аналогии. Пусть в верхней полуплоскости задана потенциальная функция плоской волны

$$u^0(x, z) = e^{-ik \sin \theta \cdot x - ik \cos \theta \cdot z}.$$

Будем искать потенциальные функции отраженного и прошедшего вниз поля в виде

$$u^1(x, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \quad u^2(x, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}.$$

Если над решеткой и под решеткой одна и та же среда, то граничные условия на  $\mathcal{M}$  сводятся к равенствам

$$-k \cos \theta + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0.$$

Условия сопряжения на  $\mathcal{N}$  дают

$$-k \cos \theta + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

и

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}.$$

Отсюда  $-1 + a_0 = -b_0$  и  $a_n = -b_n$  при  $n \neq 0$ . Тогда имеем ПСФУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = k \cos \theta^0 \quad \text{на } \mathcal{M}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Это ПСФУ с помощью интегрально-сумматорного тождества

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \int_0^l \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt$$

преобразуется в БСЛАУ

$$-l a_k \gamma_k + \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m I_{n-m} J_{m-k} = -k \cos \theta^0 I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

## 6. ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

Проводящие тела сильно влияют на электромагнитные поля: характеристики поля принимают экстремальные значения вблизи металлических поверхностей, вдоль которых распространяются электромагнитные волны. Для координатных металлических границ в основных ортогональных системах координат относительно легко построить системы собственных волн, через которые можно выразить любые другие волны в волноводной структуре.

### 6.1. Плоский волновод

Плоский волновод представляет собой слой диэлектрика, ограниченный параллельными металлическими пластинами (см. рис. 6.1).

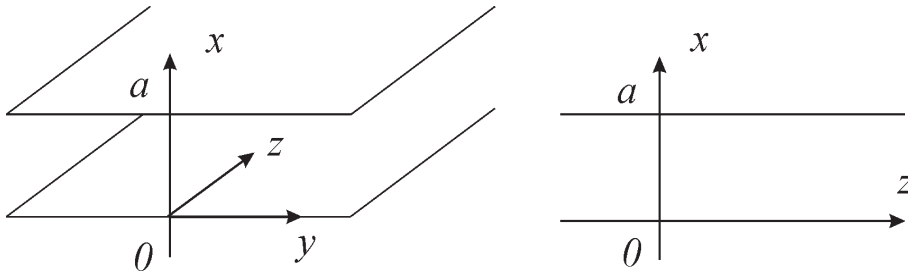


Рис. 6.1. Плоский волновод

Пусть, как и раньше, среда однородная и изотропная, свободные токи и заряды отсутствуют, и поле гармонически зависит от времени. Предположим также, что *компоненты поля не зависят от координаты  $y$*  ( $\partial/\partial y = 0$ ). Тогда система уравнений Максвелла (для комплексных амплитуд) в декартовой системе координат распадается на две независимые подсистемы (как и при изучении плоских волн). Любое решение системы Максвелла можно представить в виде суммы двух решений вида:  $(E_x, 0, E_z)$ ,  $(0, H_y, 0)$  и  $(0, E_y, 0)$ ,  $(H_x, 0, H_z)$ . В теории волноводов принята следующая терминология: решения первого типа называют **E**-волнами или **ТМ**-волнами (так как  $E_z \neq 0$ , а  $H_z = 0$ , или в силу того, что вектор **H** перпендикулярен плоскости  $(x, z)$ ), а решения второго типа – **H**-волнами или **ТЕ**-волнами (так как  $E_z = 0$ , а  $H_z \neq 0$ , или в силу того, что вектор **E** перпендикулярен плоскости  $(x, z)$ ). В плоском волноводе **ТЕМ**-волны ( $E_z = 0$  и  $H_z = 0$ ) распространяться не могут.

Для каждой из подсистем уравнений все искомые функции можно выразить через одну вспомогательную потенциальную функцию. Для **ТЕ**-волн

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x}$$

и для **ТМ**-волн

$$E_x = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad H_y = u.$$

В каждом случае потенциальная функция  $u(x, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon.$$

На границах полосы (на стенках волновода) должны быть равны нулю касательные составляющие вектора  $\mathbf{E}$ , то есть компоненты  $E_y$  и  $E_z$ .

Исследуем элементарные ТЕ-волны плоского волновода. Для этого найдем методом разделения переменных частные решения уравнения Гельмгольца в полосе  $0 < x < a$ , удовлетворяющие условиям  $u = 0$  при  $x = 0$  и при  $x = a$  (первая краевая задача). Если  $u(x, z) = X(x)Z(z)$ , то

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0.$$

Введем постоянную разделения, равную первой дроби в левой части равенства. При неотрицательных значениях этой постоянной не существует ненулевых решений уравнения  $X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0$ , удовлетворяющих краевым условиям  $X(0) = 0$ ,  $X(a) = 0$ . Если же постоянная разделения отрицательная, то уравнение  $X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$  имеет ненулевые решения  $X_m(x) = c \sin \alpha_m x$ , удовлетворяющие краевым условиям, при  $\alpha_m = \pi m / a$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Следовательно, функция  $Z(z)$  должна быть решением уравнения  $Z''(z) + (k^2 - \alpha^2) Z(z) = 0$ . Обозначим

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2},$$

причем условимся вычислять значение корня так, чтобы выполнялось условие  $\operatorname{Re} \gamma_m > 0$  или  $\operatorname{Im} \gamma_m > 0$ . Тогда потенциальным функциям

$$u_m(x, z) = c \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot e^{\pm i \gamma_m z}, \quad m = 1, 2, \dots$$

соответствуют  $TE_m$ -волны плоского волновода. Здесь  $c$  – некоторое комплексное число, амплитуда собственной волны.

Потенциальные функции  $TM_m$ -волн плоского волновода

$$u_m(x, z) = c \cos \frac{\pi m x}{a} \cdot e^{\pm i \gamma_m z}, \quad m = 0, 1, \dots$$

можно найти таким же способом.

Переносят ли энергию собственные волны (или *моды*) плоского волновода и в каком направлении? Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим вектор Пойнтинга.

Для моды  $TE_m$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_y H_z^*, 0, -E_y H_x^*).$$

Если продольная постоянная распространения  $\gamma_m$  вещественная (таких значений может быть только конечное число), то

$$\bar{\Pi} = (0, 0, \pm \frac{\gamma_m |c|^2}{2\omega \mu_0 \mu} \sin^2 \frac{\pi m x}{a}).$$

Если же значение  $\gamma_m$  чисто мнимое, то  $\bar{\Pi} = 0$ . Таким образом, энергию вдоль плоского волновода переносят только *волноводные моды* ( $\operatorname{Re} \gamma_m \neq 0$ ), которых не более чем конечное число, а все остальные – *затухающие моды* – не переносят энергию.

Поток энергии, которую волноводная мода переносит через сечение волновода, отнесенный на единицу "глубины"

$$P = \int_0^a \bar{\Pi}_z dx = \pm \frac{a \gamma_m |c|^2}{4\omega \mu_0 \mu}.$$

Как известно, любую дважды дифференцируемую функцию в интервале  $(0, a)$  функцию, равную нулю при  $x = 0$  и  $x = a$ , можно разложить в равномерно сходящийся ряд по функциям  $\sin(\pi m x/a)$

(теорема Стеклова). Поэтому потенциальную функцию любой ТЕ-волны можно представить в виде

$$u(x, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \sin \frac{\pi m}{a} x \cdot e^{\pm i \gamma_m z}.$$

Если в показателях экспонент выбран знак  $+$ , то все слагаемые в сумме переносят энергию вдоль оси  $z$  или затухают в этом направлении. Волны, соответствующие таким потенциальным функциям, будем называть *положительно ориентированными*. Если же в показателях экспонент поставлен знак  $-$ , то имеем дело с *отрицательно ориентированными* волнами.

В случае ТМ-волн

$$u(x, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \cos \frac{\pi m}{a} x \cdot e^{\pm i \gamma_m z}.$$

Любую волну в плоском волноводе можно представить как сумму волн двух типов: ТЕ и ТМ.

Точно такой же результат можно получить, если искать решения уравнения Гельмгольца в виде

$$u(x, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(z) \sin \frac{\pi m}{a} x \quad \text{или} \quad u(x, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(z) \cos \frac{\pi m}{a} x.$$

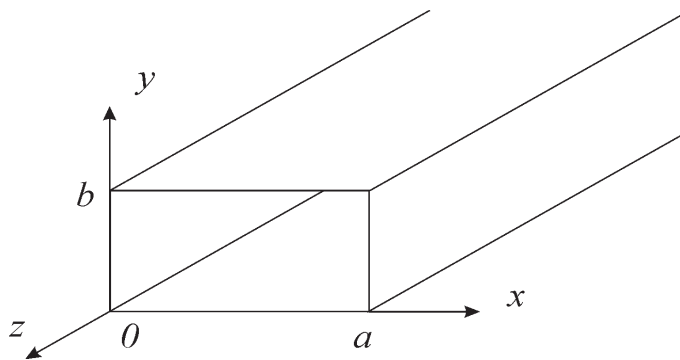


Рис. 6.2. Прямоугольный волновод

## 6.2. Прямоугольный волновод

Прямоугольный волновод представляет собой трубу прямоугольного сечения с металлическими стенками, заполненную диэлектриком (см. рис. 3.2).

Будем искать решения уравнений Максвелла в прямоугольной цилиндрической области, удовлетворяющие условиям на границе:

$$E_y, E_z = 0 \text{ при } x = 0, x = a; \quad E_x, E_z = 0 \text{ при } y = 0, y = b.$$

Предположим, что зависимость всех искомых функций от координаты  $z$  имеет вид  $e^{i\gamma z}$ , где  $\gamma$  – некоторое число (продольная постоянная распространения). Тогда система Максвелла принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma H_y &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma E_y &= i\omega\mu_0\mu H_x, \\ i\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & i\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega\mu_0\mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

Выберем в качестве потенциальных функций продольные компоненты поля  $E_z$  и  $H_z$ . Из систем уравнений

$$\begin{aligned} -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + i\gamma H_y &= \frac{\partial H_z}{\partial y}, & i\gamma E_x - i\omega\mu_0\mu H_y &= \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ i\omega\mu_0\mu H_x + i\gamma E_y &= \frac{\partial E_z}{\partial y}, & i\gamma H_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y &= \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left( i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \\ H_y &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left( i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned}$$



$$H_x = \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left( -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right),$$

$$E_y = \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left( i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right),$$

Подставим эти выражения в два оставшихся уравнения и получим два независимых потенциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2) E_z = 0, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2) H_z = 0.$$

Заметим, что при выводе потенциальных уравнений не имело значения, какое сечение имеет волновод и какие условия должны быть заданы на его стенках.

Пара  $(E_z, 0)$  порождает ТМ-волны (или Е-волны) прямоугольного волновода, а пара  $(0, H_z)$  – ТЕ-волны (или Н-волны). Частные решения можно искать независимо. Функция  $E_z$  должна обращаться в нуль при  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . Поэтому в случае ТМ-волн ненулевыми частными решениями граничной задачи для первого потенциального уравнения являются функции

$$E_{z,mn}(x, y, z) = \sin \frac{\pi m}{a} x \cdot \sin \frac{\pi n}{b} y \cdot e^{\pm i\gamma_{mn} z},$$

где  $m, n = 1, 2, \dots$  (мы не разделяем индексы  $m$  и  $n$  запятой), здесь

$$\gamma_{mn} = \sqrt{k^2 - \delta_{mn}}, \quad \delta_{mn} = \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2.$$

Знак  $+$  соответствует положительно ориентированным волнам (переносящим энергию вдоль оси  $z$  или затухающим в этом направлении), знак  $-$  соответствует отрицательно ориентированным волнам. Здесь и дальше принято, что или  $\operatorname{Re} \gamma_{mn} > 0$ , или  $\operatorname{Im} \gamma_{mn} > 0$ . Легко проверить, что  $E_y = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $E_x = 0$  при  $y = 0$ ,  $y = b$ .

В случае ТЕ-волн условиям  $\partial H_z / \partial x = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = a$ , и  $\partial H_z / \partial y = 0$  при  $y = 0$ ,  $y = b$  удовлетворяют ненулевые решения

второго уравнения

$$H_{z,mn}(x, y, z) = \cos \frac{\pi m x}{a} \cdot \cos \frac{\pi n y}{b} \cdot e^{i\gamma_{mn}z},$$

здесь значения  $\gamma_{mn}$  такие же, но одно из чисел  $m$  или  $n$  может быть равным нулю.

Таким образом, для положительно ориентированных решений типа  $TE_{mn}$   $m, n = (0), 1, \dots$  (ноль в скобках означает, что  $m$  и  $n$  не равны нулю одновременно)

$$E_{z,mn}(x, y, z) = 0, \quad H_{z,mn}(x, y, z) = \cos \frac{\pi m}{a} x \cdot \cos \frac{\pi n}{b} y \cdot e^{i\gamma_{mn}z}.$$

Любую волну в прямоугольном волноводе можно представить как сумму ТЕ- и ТМ-волн.

Второй способ поиска решений собственных волн состоит в следующем. Так как функция  $E_z$  должна обращаться в нуль при  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ , то будем искать ее в виде

$$E_z(x, y, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e_{z,mn}(z) \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Из граничных условий следует, что

$$E_y(x, y, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} e_{y,m}(y, z) \sin \frac{\pi m x}{a},$$

$$E_x(x, y, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_{x,n}(x, z) \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Анализ слагаемых в уравнениях Максвелла позволяет установить, по каким функциям разлагаются в ряды Фурье все остальные компоненты векторов  $E$  и  $H$ . Тогда из уравнений Максвелла следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для зависящих только от  $z$  коэффициентов таких разложений.

### 6.3. Прямоугольный резонатор

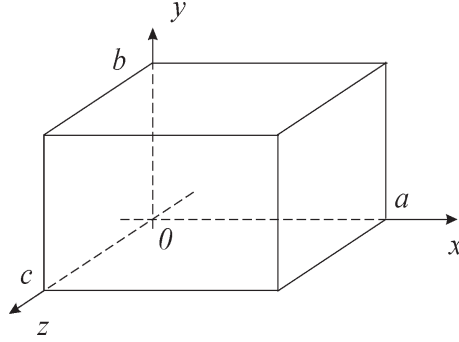


Рис. 6.3. Прямоугольный резонатор

Прямоугольный резонатор представляет собой трехмерную прямоугольную область, ограниченную металлическими стенками. Его удобно рассматривать как отрезок прямоугольного волновода, заключенный между поперечными сечениями  $z = 0$  и  $z = c$  (см. рис. 6.3). На металлических стенках  $z = 0$  и  $z = c$  должны обращаться в нуль компоненты электрического вектора  $E_x$  и  $E_y$  или, что удобнее в данном случае,  $H_z$  и  $\partial E_z / \partial z$ .

Из граничных условий при  $z = 0$  следует, что  $-a_{mn} + b_{mn} = 0$ ,  $c_{mn} + d_{mn} = 0$ . Тогда

$$E_z(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} a_{mn} 2 \cos \gamma_{mn} z \cdot sa_m(x) sb_n(y),$$

$$H_z(x, y, z) = \sum_{m,n=(0)}^{+\infty} c_{mn} 2i \sin \gamma_{mn} z \cdot sa_m(x) sb_n(y).$$

Граничные условия при  $z = c$  будут выполнены, если  $\sin \gamma_{mn} c = 0$ . Отсюда следует равенство

$$\omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{c}\right)^2.$$

Поэтому собственные волны у прямоугольного резонатора существуют не всегда, а только при некоторых значениях круговой частоты  $\omega_{mnp}$  (или при значениях  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , удовлетворяющих этому равенству).

## 7. ПЕРЕГОРОДКИ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим несколько задач дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих перегородках в плоском волноводе. Все эти задачи сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения искомого электромагнитного поля по собственным волнам одного из участков волноводной структуры или к интегральным уравнениям относительно одной из компонент поля на сечении волновода.

### 7.1. Поперечная перегородка

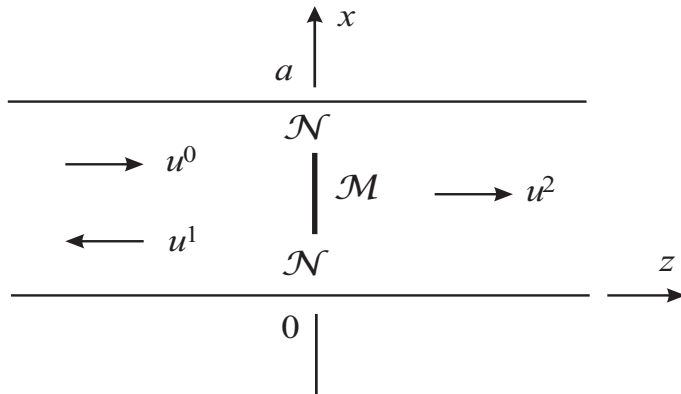


Рис. 7.1. Поперечная перегородка в плоском волноводе

Пусть в плоском волноводе со стенками  $x = 0$  и  $x = a$  на поперечном сечении  $z = 0$  размещена идеально проводящая бесконечно тонкая лента (рис. 4.1). Пусть, как и раньше, компоненты электромагнитного поля не зависят от координаты  $y$ . Напомним, что в случае поля ТЕ-поляризации при гармонической зависимости от времени ненулевые компоненты векторов **E** и **H**

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x},$$

где функция  $u(x, z)$  – решение уравнения Гельмгольца.

Начнем со случая, когда одинаковы свойства сред слева и справа от сечения  $z = 0$ . Часть отрезка  $[0, a]$  на оси  $z$ , занятую экраном, обозначим через  $\mathcal{M}$ , а оставшуюся часть отрезка – через  $\mathcal{N}$ . Пусть на экран  $\mathcal{M}$  слева набегают собственная волна волновода с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = a_l^0 \sin \frac{\pi l}{a} x \cdot e^{i\gamma_n z}.$$

Нужно найти поле, возникающее при ее дифракции.

Предполагается, что эта волна – волноводная мода (например,  $l = 1$ ). Можно считать, что ее амплитуда  $a_l^0 = 1$ .

Будем искать потенциальные функции волн, уходящих влево и вправо от сечения  $z = 0$ , в виде

$$u^1(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{-i\gamma_n z}, \quad u^2(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{i\gamma_n z},$$

здесь, как и раньше,  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$ ,  $\text{Re } \gamma_n > 0$  или  $\text{Im } \gamma_n > 0$ .

На сечении волновода  $z = 0$  должны выполняться граничные условия

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = 0, \quad u^2(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

и условия сопряжения

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \quad \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0),$$

$$x \in \mathcal{N}.$$

Из граничных условий следует, что первое условие сопряжения должно выполняться при  $x \in [0, a]$ . Тогда

$$a_l^0 + a_l = b_l, \quad a_n = b_n, \quad n \neq l.$$

Исключим неизвестные  $b_n$  и получим *парное сумматорное функциональное уравнение* (ПСФУ)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x = -a_l^0 \sin \frac{\pi l}{a} x, \quad x \in \mathcal{M};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sin \frac{\pi n}{a} x = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Первое равенство – это первое граничное условие, второе равенство следует из второго условия сопряжения.

От ПСФУ можно перейти к *бесконечной системе линейных алгебраических уравнений* (БСЛАУ) разными способами. Первый способ (плохой): приравняем коэффициенты Фурье левой и правой частей ПСФУ, т.е. умножим обе его части на  $\sin(\pi k x/a)$  и проинтегрируем от 0 до  $a$ . Получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n I_{nk} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n J_{nk} = -a_l^0 I_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$I_{nk} = \int_{\mathcal{M}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi k}{a} x \cdot dx, \quad J_{nk} = \int_{\mathcal{N}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi k}{a} x \cdot dx.$$

Эти интегралы легко вычислить явно. Получилась простая БСЛАУ, но ее приближенное решение не удастся найти.

Второй подход основан на *интегрально-сумматорном тождестве* (ИСТ)

$$\begin{aligned} \int_0^a \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sin \frac{\pi n}{a} t \right) \left( \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \sin \frac{\pi m}{a} t \cdot \sin \frac{\pi m}{a} x \right) dt = \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма ряда Фурье с коэффициентами  $a_n$  задана на  $\mathcal{M}$  (первая часть ПСФУ), а на  $\mathcal{N}$  из ИСТ следует, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \sin \frac{\pi m}{a} x \cdot I_{nm}, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Перейдем от нового парного сумматорного равенства к равенству коэффициентов Фурье и получим

$$-\frac{a}{2} a_k + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = a_l^0 I_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приближенное решение этой БСЛАУ легко найти методом усечения, если перейти к конечному числу неизвестных и к конечному числу уравнений:

$$-\frac{a}{2} a_k + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n \sum_{m=1}^M \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = a_l^0 I_{lk}, \quad k = 1 \dots N.$$

Здесь есть два параметра усечения, натуральные числа  $N$  и  $M$ .

Как проверить, правильно ли найдено решение задачи дифракции? Можно использовать следующие тесты:

- 1) при  $N \rightarrow +\infty$  коэффициенты  $a_n$  должны образовывать сходящуюся последовательности (*внутренняя сходимость*);
- 2) должен выполняться *закон сохранения энергии*;
- 3) *в предельных случаях*, когда экран очень мал или, наоборот, занимает почти все сечение волновода, ясно, какими должны получаться решения;
- 4) наконец, самая важная проверка – выполняется ли *граничное условие на экране*?

Какая БСЛАУ соответствует случаю ТМ-поляризованных волн?

## 7.2. Разветвление плоского волновода

Пусть в плоском волноводе справа от сечения  $z = 0$  расположена тонкая проводящая полуплоскость  $x = b$ , разделяющая волновод на две части: В и С. Левую половину волновода будем обозначать А (рис. 7.2).

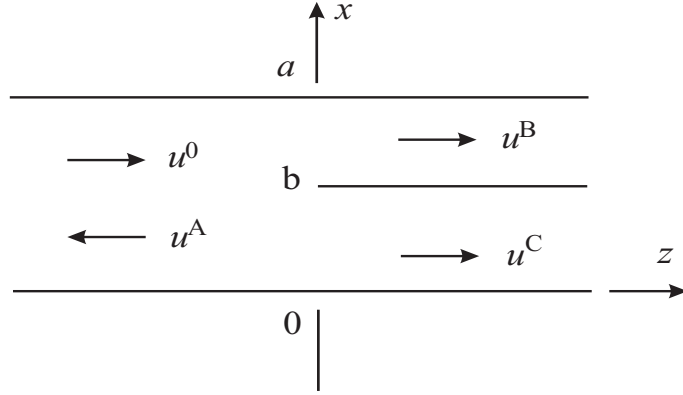


Рис. 7.2. Разветвление плоского волновода

В трех полубесконечных частях волновода зависимость потенциальных функций собственных волн от координаты  $x$  определяют функции (с нормировкой)

$$sa_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$sb_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad sc_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a-b}} \sin \frac{\pi n}{a-b} (x-b), \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что во всех частях волноводной структуры среды одинаковы. Пусть

$$\gamma_{an} = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2},$$

$$\gamma_{bn} = \sqrt{k^2 - (\pi n/b)^2}, \quad \gamma_{cn} = \sqrt{k^2 - (\pi n/a-b)^2}.$$

Правило вычисления корней из комплексных чисел сохраним старое: или вещественная часть положительна, или мнимая часть положительна.



Пусть на разветвление волновода набегают слева волна с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = a_l^0 sa_l(x) e^{i\gamma_{al}z}.$$

Нужно найти поле, возникающее при ее дифракции.

Будем искать потенциальные функции волн в отдельных частях разветвленного волновода в виде

$$u^A(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n sa_n(x) e^{-i\gamma_{an}z},$$

$$u^B(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sb_n(x) e^{i\gamma_{bn}z}, \quad u^C(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n sc_n(x) e^{i\gamma_{cn}z}.$$

Запишем условия сопряжения при  $z = 0$ . Если  $x \in (0, b)$ , то

$$a_l^0 sa_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n sa_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sb_n(x),$$

$$a_l^0 \gamma_{al} sa_l(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_{an} sa_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \gamma_{bn} sb_n(x),$$

а если  $x \in (b, a)$ , то

$$a_l^0 sa_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n sa_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n sc_n(x),$$

$$a_l^0 \gamma_{al} sa_l(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_{an} sa_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \gamma_{cn} sc_n(x).$$

Перейдем к БСЛАУ относительно коэффициентов  $a_n$ . Остальные неизвестные можно исключить двумя способами – по одному или все вместе.

Из первых двух равенств, если перейти к коэффициентам Фурье относительно системы функций  $sb_n(x)$  (т.е. умножить обе части на  $sb_m(x)$  и проинтегрировать от 0 до  $b$ ), следует, что

$$a_l^0 I_{lm}^b + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n I_{nm}^b = b_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и

$$a_l^0 \gamma_{al} I_{lm}^b - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_{an} I_{nm}^b = b_m \gamma_{bm}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

здесь

$$I_{nm}^b = \int_0^b s a_n(x) s b_m(x) dx.$$

Тогда

$$a_l^0 [\gamma_{bm} - \gamma_{al}] I_{lm}^b + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n [\gamma_{bm} + \gamma_{an}] I_{nm}^b = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Аналогично, из третьего и четвертого равенств, если умножить их на  $s c_m(x)$  и проинтегрировать от  $b$  до  $a$ , получим

$$a_l^0 I_{lm}^c + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n I_{nm}^c = c_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и

$$a_l^0 \gamma_{al} I_{lm}^c - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_{an} I_{nm}^c = c_m \gamma_{cm}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

здесь

$$I_{n,m}^c = \int_b^a s a_n(x) s c_m(x) dx.$$

Тогда

$$a_l^0 [\gamma_{cm} - \gamma_{al}] I_{lm}^c + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n [\gamma_{cm} + \gamma_{an}] I_{nm}^c = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Решение этой БСЛАУ, состоящей из двух групп уравнений, можно найти аналитически. Но сходимость приближенного метода наблюдается только при особом способе усечения.

Другой способ перехода к БСЛАУ основан на интегрально-сумматорных тождествах. Предварительно перейдем к новым искомым коэффициентам. Пусть

$$d_l = a_l - a_l^0, \quad d_n = a_n, \quad n \neq l.$$

Тогда во втором и в четвертом равенствах исчезнут первые слагаемые в левой части, а первые слагаемые в первом и третьем равенствах удвоятся.

Первое ИСТ имеет вид

$$\int_0^b \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \gamma_{bn} sb_n(t) \right) K_b(t, x) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sb_n(x), \quad x \in [0, b],$$

$$K_b(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} sb_m(t) sb_m(x).$$

Следовательно, если умножить второе равенство на  $K_b(t, x)$  и проинтегрировать по  $t$  от 0 до  $b$ , то получим

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} sb_m(x) I_{n,m}^b = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sb_n(x).$$

Вычтем это равенство из первого равенства. Будем иметь

$$2 a_l^0 sa_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n sa_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} I_{n,m}^b sb_m(x) = 0, \\ x \in (0, b).$$

Точно так же выводится вторая половина парного уравнения

$$2 a_l^0 sa_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n sa_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} I_{n,m}^c sc_m(x) = 0, \\ x \in (b, a).$$

Спроектируем парное уравнение на функции  $sa_k(x)$  (умножим на  $sa_k(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $a$ ). Получим БСЛАУ

$$2 a_l^0 \delta_{kl} + d_k + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \gamma_{an} \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} I_{n,m}^b I_{m,k}^b + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} I_{n,m}^c I_{m,k}^c \right] = 0, \\ k = 1, 2, \dots,$$

здесь  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Легко увидеть, что изменится в случае, когда продольные перегородки разделяют правую часть волновода на большее (чем два) число частей.

### 7.3. Переопределенные граничные задачи для уравнения Гельмгольца

В двух предыдущих пунктах при сведении задач дифракции волн на перегородках в плоском волноводе решения уравнения Гельмгольца в полуполосе  $0 < x < a$ ,  $z < 0$ , отыскивались в виде

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n s_n(x) e^{-i\gamma_n z}, \quad s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

Рассмотрим следующую граничную задачу в полуполосе: найти отрицательно ориентированное решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, z) = 0, \quad u(a, z) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = u_1(x).$$

Коэффициенты Фурье функций  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  относительно системы функций  $s_n(x)$  будем обозначать  $u_{0n}$  и  $u_{1n}$  соответственно.

Легко видеть, что коэффициенты  $c_n$  в разложении искомого решения по собственным функциям однозначно определяются по любому из двух граничных условий при  $z = 0$ . Действительно, если

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n s_n(x) = u_0(x),$$

то  $c_n = u_{0n}$ . Если же

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \gamma_n s_n(x) = u_1(x),$$

то  $-ic_n \gamma_n = u_{1n}$ . Таким образом,  $u_{1n} + i\gamma_n u_{0n} = 0$ .

Следовательно, рассматриваемая граничная задача для уравнения Гельмгольца в полуполосе является *переопределенной*. Граничных условий задано больше, чем нужно для определения единственного решения. Поэтому функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  не могут быть заданы произвольно. Связь между ними легко сформулировать как на языке коэффициентов Фурье, так и на языке самих функций.

*Решение переопределенной граничной задачи существует и единственно тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье функций  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  удовлетворяют условиям*

$$u_{1n} + i\gamma_n u_{0n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

*Решение переопределенной граничной задачи существует и единственно тогда и только тогда, когда функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  удовлетворяют условию*

$$\int_0^a u_1(t) K_1(t, x) dt = u_0(x), \quad K_1(t, x) = i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} s_n(t) s_n(x),$$

или

$$\int_0^a u_0(t) K_0(t, x) dt = u_1(x), \quad K_0(t, x) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n s_n(t) s_n(x).$$

Связь между функциями  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  устанавливается так:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0n} s_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i}{\gamma_n} u_{1n} s_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i}{\gamma_n} \left( \int_0^a u_1(t) s_n(t) dt \right) s_n(x) = \int_0^a u_1(t) K_1(t, x) dt. \end{aligned}$$

Вторая форма условия разрешимости выводится аналогично. Заметим, что операции над бесконечными суммами и интегралами выполнялись формально. Возможность этих операций должна быть обоснована.

Обратим внимание еще и на то, что условия разрешимости переопределенной задачи в интегральной форме представляют собой пару интегральных уравнений, взаимно обращающих друг друга.

Кроме того, если, например, в первом условии разрешимости в интегральной форме заменим функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  на суммы соответствующих рядов, то получим

$$\int_0^a \left( \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \gamma_n s_n(t) \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} s_n(t) s_n(x) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n s_n(x),$$

то есть фактически интегрально-сумматорное тождество из п. 7.1. Таким образом, это интегрально-сумматорное тождество является условием разрешимости переопределенной граничной задачи.

В правой полуполосе  $0 < x < 0$ ,  $z > 0$  переопределенная граничная задача для уравнения Гельмгольца ставится точно так же, но ее решения будем искать в классе положительно ориентированных решений вида

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n s_n(x) e^{i\gamma_n z}.$$

Отличие от предыдущего случая только в том, что перед постоянными  $\gamma_n$  стоит другой знак. Поэтому для "правой" переопределенной граничной задачи условия разрешимости формулируются следующим образом.

*Решение переопределенной граничной задачи существует и единственно тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье функций  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  удовлетворяют условиям*

$$u_{1n} - i\gamma_n u_{0n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

*или когда функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  удовлетворяют одному из условий*

$$-\int_0^a u_1(t) K_1(t, x) dt = u_0(x), \quad -\int_0^a u_0(t) K_0(t, x) dt = u_1(x).$$

Для чего нужны условия разрешимости переопределенных граничных задач? Чтобы однозначно определить решение уравнения Гельмгольца в полуполосе, достаточно задать на торце полуполосы или функцию  $u_0(x)$ , или функцию  $u_1(x)$ . Ясно, что искомое решение может быть найдено в виде ряда с коэффициентами  $c_n$ , которые определяются по коэффициентам Фурье одной из этих функций. С другой стороны,

$$u(x, z) = \int_0^a u_0(t) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(t) s_n(x) e^{\mp i \gamma_n z} \right) dt$$

или

$$u(x, z) = \int_0^a u_1(t) \left( \mp i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} s_n(t) s_n(x) e^{\mp i \gamma_n z} \right) dt$$

(верхний знак соответствует полуполосе  $z < 0$ , а нижний – полуполосе  $z > 0$ ).

#### 7.4. Задача о скачке и интегральные уравнения задачи дифракции

Рассмотрим задачу о скачке для уравнения Гельмгольца в полосе  $0 < x < a$ . Будем искать положительно ориентированное решение  $u^+(x, z)$  при  $z > 0$  и отрицательно ориентированное решение  $u^-(x, z)$  при  $z < 0$ , удовлетворяющие граничным условиям

$$u^\pm(0, z) = 0, \quad u^\mp(a, z) = 0, \quad z > 0 \quad \text{или} \quad z < 0,$$

и условиям сопряжения при  $z = 0$

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = a(x), \quad \frac{\partial u^+}{\partial z}(x, 0) - \frac{\partial u^-}{\partial z}(x, 0) = b(x), \quad x \in [0, a].$$

Рассмотрим общий случай, когда среды слева и справа от границы  $z = 0$  различны. Условимся у величин, характеризующих свойства сред, ставить  $\pm$  снизу, а у величин, описывающие решения уравнения Гельмгольца (волны), – знаки  $\pm$  сверху.

Для коэффициентов Фурье функций  $u_0^\pm(x)$  и  $u_1^\pm(x)$  имеем системы из уравнений

$$u_{0n}^+ - u_{0n}^- = a_n, \quad u_{1n}^+ - u_{1n}^- = b_n, \quad u_{1n}^- + i\gamma_n^- u_{0n}^- = 0, \quad u_{1n}^+ - i\gamma_n^+ u_{0n}^+ = 0.$$

Отсюда

$$u_{0n}^+ = \frac{\gamma_n^- a_n + i b_n}{\gamma_n^- + \gamma_n^+}, \quad u_{0n}^- = \frac{-\gamma_n^+ a_n + i b_n}{\gamma_n^- + \gamma_n^+}.$$

Поэтому *единственное решение задачи о скачке имеет вид*

$$\begin{aligned} u^\mp(x, z) = & \int_0^a a(t) \left( \mp \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma_n^\pm}{\gamma_n^- + \gamma_n^+} s_n(t) s_n(x) e^{\mp i\gamma_n^\mp z} \right) dt + \\ & + \int_0^a b(t) \left( -i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n^- + \gamma_n^+} s_n(t) s_n(x) e^{\mp i\gamma_n^\mp z} \right) dt. \end{aligned}$$

Задача об отражении и преломлении собственной волны на границе раздела сред в плоском волноводе – частный случай задачи о скачке. Действительно, пусть на границу раздела сред  $z = 0$  набегаёт слева волна с потенциальной функцией  $u^0(x, z)$ . Условия сопряжения

$$u^-(x, 0) + u^0(x, 0) = u^+(x, 0), \quad \frac{\partial u^-}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^+}{\partial z}(x, 0)$$

– это условия задачи о скачке при  $a(x) = u^0(x, 0)$  и  $b(x) = \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0)$ . Следовательно, если, например,

$$u^0(x, z) = c_l^0 s_l(x) e^{i\gamma_l^- z},$$

то

$$u^-(x, z) = c_l^0 \frac{\gamma_l^- - \gamma_l^+}{\gamma_l^- + \gamma_l^+} s_l(x) e^{-i\gamma_l^- z}, \quad u^+(x, z) = c_l^0 \frac{2\gamma_l^-}{\gamma_l^- + \gamma_l^+} s_l(x) e^{i\gamma_l^+ z}.$$

Заметим, что при выводе этих формул не предполагалось, что отраженная и преломленная волна – собственные волны с тем же номером, что и исходная волна.



Вернемся теперь к задаче дифракции электромагнитной волны на поперечной перегородке в плоском волноводе (см. п.4.1). Предположим пока, что одинаковы среды, заполняющие волновод слева и справа от перегородки. Также будем считать, что волна от внешнего источника  $u^0(x, z)$  задана и слева, и справа.

Из формулы, дающей решение задачи о скачке, следует, что *задача дифракции равносильна интегральному уравнению*

$$\int_{\mathcal{M}} b(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} s_n(t) s_n(x) dt = -2i u^0(x, 0), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Действительно, будем искать решение задачи дифракции в форме решения задачи о скачке. Из условий сопряжения на  $\mathcal{N}$  и граничных условий на  $\mathcal{M}$  следует, что в условиях задачи о скачке  $a(x) = 0$  и на  $\mathcal{M}$ , и на  $\mathcal{N}$ . На  $\mathcal{N}$  имеем  $b(x) = 0$ . Тогда

$$u^{\mp}(x, z) = -i \int_{\mathcal{M}} b(t) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\gamma_n} s_n(t) s_n(x) e^{\mp i\gamma_n z} \right) dt.$$

Поэтому любое из граничных условий на  $\mathcal{M}$  можно записать как интегральное уравнение.

## 8. ПЛАНАРНЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Планарный диэлектрический волновод образуют три слоя диэлектрика, которые заполняют все пространство: подложка  $s$  ( $z < 0$ ), волноводный слой  $f$  ( $0 < z < h$ ) и покровная среда  $a$  ( $z > h$ ) с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_f$  и  $\varepsilon_a$  соответственно (см. рис. 1). Пусть эти числа вещественные и  $0 < \varepsilon_a < \varepsilon_s < \varepsilon_f$ . Только в этом случае у планарного волновода существуют собственные волны.

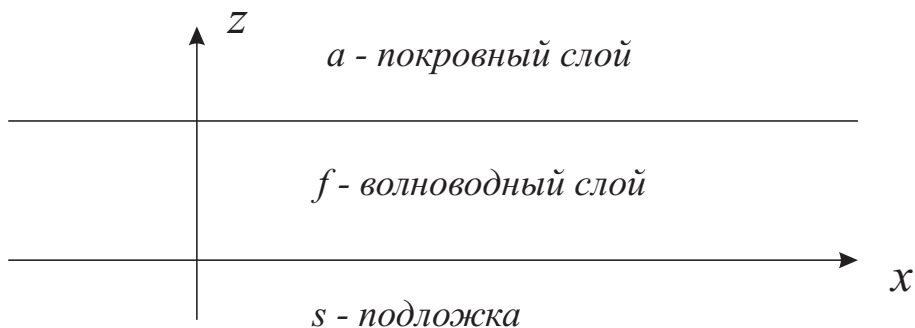


Рис. 8.1. Планарный диэлектрический волновод

В оптическом диапазоне вместо диэлектрических проницаемостей сред  $\varepsilon$  обычно используют показатели преломления сред  $n$ , связь между ними простая:  $\varepsilon = n^2$ . Мы же будем рассматривать волновые числа  $k$ , пусть магнитные проницаемости во всех слоях одинаковые.

Существенное отличие планарного волновода от плоского волновода с металлическими стенками состоит в том, что продольные постоянные распространения его собственных волн образуют множество, состоящее как из отдельных точек (дискретный спектр), так и из некоторых интервалов (непрерывный спектр).

### 8.1. Постановка задачи о собственных волнах

Пусть, как и в предыдущих задачах, зависимость электромагнитного поля от времени имеет вид  $e^{-i\omega t}$ , свободные токи и заряды отсутствуют, а все среды, образующие планарный волновод, являются однородными и изотропными. Предположим также, что электромагнитное поле не зависит от координаты  $y$ . Тогда, как известно, система уравнений Максвелла распадается на две независимые подсистемы уравнений. В каждом случае ненулевые компоненты поля выражаются через потенциальную функцию  $u(x, z)$  – решение уравнения Гельмгольца.

Будем искать ТЕ-поляризованные собственные волны планарно-

го диэлектрического волновода. Потенциальные функции этих волн определяются как ненулевые решения уравнения Гельмгольца с кусочно постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z) u(x, z) = 0,$$

где  $k(z)$  – кусочно постоянная функция,  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z)$ . Напомним, что  $E_y = u$ ,  $H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}$ .

Условия сопряжения на границах раздела сред в случае волн ТЕ-поляризации имеют вид

$$u(x, h - 0) = u(x, h + 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(h, 0 - 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0),$$

$$u(x, 0 - 0) = u(x, 0 + 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0).$$

Условие на бесконечности сформулируем так: искомые потенциальные функции должны быть ограничены при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Частные решения задачи сопряжения будем искать в виде

$$u(x, z) = e^{i\alpha x} f(z)$$

(фактически методом разделения переменных). Параметр  $\alpha$  (продольная постоянная распространения) в общем случае – комплексное число. Этот параметр представляет собой постоянную разделения: если искать  $u(x, z)$  в виде  $X(x) Z(z)$ , то отдельные множители должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha^2 = 0, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2(z) - \alpha^2 = 0.$$

Достаточно считать, что значения  $\alpha$  принадлежат первой четверти комплексной плоскости. Тогда значения  $\alpha^2$  заполняют верхнюю полуплоскость. При замене  $\alpha$  на  $-\alpha$  полученные выше уравнения не

изменяются, но меняется на противоположное направление движения волн, которые соответствуют потенциальным функциям  $u(x, z)$ .

Искомая функция  $f(z)$  должна удовлетворять уравнению

$$f''(z) + [k^2(z) - \alpha^2] f(z) = 0, \quad z \neq h, \quad z \neq 0.$$

Пусть

$$\gamma_m(\alpha) = \sqrt{k_m^2 - \alpha^2}, \quad \delta_m(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_m^2}, \quad m = a, f \text{ или } s.$$

При  $k_m^2 - \alpha^2 > 0$  корни характеристического полинома дифференциального уравнения будем записывать как  $\pm i\gamma_m(\alpha)$  и решения уравнения – через косинус и синус, а при  $\alpha^2 - k_m^2 < 0$  в качестве корней удобнее брать  $\pm\delta_m(\alpha)$ , а решения записывать через экспоненты. Произвольные постоянные в решении также зависят от  $\alpha$ , но эту зависимость больше указывать не будем.

Функция  $f(z)$  должна быть ограниченной при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

## 8.2. Моды непрерывного спектра

Пусть  $0 < \alpha < k_a$  или  $\alpha$  принадлежит положительной полуоси мнимой оси. В этом случае

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : A \cos \gamma_a(z - h) + B \sin \gamma_a(z - h), \\ 0 < z < h & : C \cos \gamma_f z + D \sin \gamma_f z, \\ z < 0 & : E \cos \gamma_s z + F \sin \gamma_s z, \end{cases}$$

здесь  $A, B, C, D, E, F$  – некоторые постоянные (они зависят от  $\alpha$ ). Сдвиг на  $h$  при  $z > h$  сделан для удобства.

Условия сопряжения полей на границах раздела сред  $z = h$  и  $z = 0$  дают уравнения

$$A = C \cos \gamma_f h + D \sin \gamma_f h, \quad \gamma_a B = -\gamma_f C \sin \gamma_f h + \gamma_f D \cos \gamma_f h,$$

$$C = E, \quad \gamma_f D = \gamma_s F.$$

В этой системе из четырех линейных уравнений содержится шесть искомых коэффициентов, два из них остаются произвольными (лучше взять  $C$  и  $D$ ). Можно выделить два независимых частных решения, которые называют четным и нечетным: при  $C = 1$ ,  $D = 0$  имеем *четные* решения

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : \cos \gamma_f h \cdot \cos \gamma_a(z - h) - \\ & \quad - \frac{\gamma_f}{\gamma_a} \sin \gamma_f h \cdot \sin \gamma_a(z - h), \\ 0 < z < h & : \cos \gamma_f z, \\ z < 0 & : \cos \gamma_s z, \end{cases}$$

и при  $C = 0$ ,  $D = 1$  имеем *нечетные* решения

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : \sin \gamma_f h \cdot \cos \gamma_a(z - h) + \\ & \quad + \frac{\gamma_f}{\gamma_a} \cos \gamma_f h \cdot \sin \gamma_a(z - h), \\ 0 < z < h & : \sin \gamma_f z, \\ z < 0 & : \frac{\gamma_f}{\gamma_s} \sin \gamma_s z. \end{cases}$$

Таким образом, при  $\alpha$  из диапазона  $(0, k_a)$  и при чисто мнимых  $\alpha$  существуют две независимые моды (собственные волны. Такие значения  $\alpha$  принадлежат непрерывной части спектра.

Пусть теперь  $k_a < \alpha < k_s$ . В этом случае

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : A e^{-\delta_a(z-h)} + B e^{\delta_a(z-h)}, \\ 0 < z < h & : C \cos \gamma_f z + D \sin \gamma_f z, \\ z < 0 & : E \cos \gamma_s z + F \sin \gamma_s z. \end{cases}$$

Но из условия на бесконечности следует, что  $B = 0$ . Тогда условия сопряжения полей на границах раздела сред имеют вид

$$-\delta_a A = -\gamma_f C \sin \gamma_f h + \gamma_f D \cos \gamma_f h, \quad A = C \cos \gamma_f h + D \sin \gamma_f h,$$

$$C = E, \quad \gamma_f D = \gamma_s F.$$

Имеем систему из четырех уравнений для определения пяти неизвестных коэффициентов. Один коэффициент остается произвольным (у нас –  $A$ ). У задачи сопряжения имеется ненулевое решение

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : e^{-\delta_a(z-h)}, \\ 0 < z < h & : p \cos \gamma_f z + q \sin \gamma_f z, \\ z < 0 & : p \cos \gamma_s z + q \frac{\gamma_f}{\gamma_s} \sin \gamma_s z, \end{cases}$$

где

$$p = \cos \gamma_f h + \frac{\delta_a}{\gamma_f} \sin \gamma_f h, \quad q = \sin \gamma_f h - \frac{\delta_a}{\gamma_f} \cos \gamma_f h.$$

Найденные частные решения задачи сопряжения также относятся к непрерывному спектру.

### 8.3. Моды дискретного спектра

Рассмотрим теперь наиболее важный случай, когда  $k_s < \alpha < k_f$ . Решение уравнения с разрывным коэффициентом имеет вид

$$f(z) = \begin{cases} z > h & : A e^{-\delta_a(z-h)}, \\ 0 < z < h & : C \cos \gamma_f z + D \sin \gamma_f z, \\ z < 0 & : F e^{\delta_s z}, \end{cases}$$

при  $z < 0$  и при  $z > h$  убраны слагаемые, неограниченно возрастающие на бесконечности.

Условия сопряжения при  $z = h$  и  $z = 0$  дают систему из четырех уравнений для четырех неизвестных

$$C = F, \quad \gamma_f D = \delta_s F,$$

$$A = C \cos \gamma_f h + D \sin \gamma_f h, \quad -\delta_a A = -\gamma_f C \sin \gamma_f h + \gamma_f D \cos \gamma_f h.$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Чтобы упростить вычисления, удобно сначала исключить из уравнений

неизвестные  $F$  и  $A$ . Тогда останется только два уравнения

$$\begin{aligned} [\delta_a \cos \gamma_f h - \gamma_f \sin \gamma_f h] C + [\delta_a \sin \gamma_f h + \gamma_f \cos \gamma_f h] D &= 0, \\ \delta_s C - \gamma_f D &= 0. \end{aligned}$$

У такой системы уравнений имеется ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\sin \gamma_f h \cdot [\gamma_f^2 - \delta_a \delta_s] - \cos \gamma_f h \cdot [\delta_a \gamma_f + \delta_s \gamma_f] = 0. \quad (*)$$

Это уравнение для определения значений  $\alpha$  называют *характеристическим* или *дисперсионным*.

Установлено, что у уравнения (\*) может быть только конечное число корней, принадлежащих интервалу  $(k_s, k_f)$ , в том числе корней может и не быть вовсе. Эти корни образуют дискретную часть спектра.

Уравнение (\*) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}(\gamma_f h) = \frac{\frac{\delta_a}{\gamma_f} + \frac{\delta_s}{\gamma_f}}{1 - \frac{\delta_a}{\gamma_f} \frac{\delta_s}{\gamma_f}}.$$

Отсюда

$$\gamma_f h = \operatorname{arctg} \frac{\delta_a}{\gamma_f} + \frac{\delta_s}{\gamma_f} + j\pi, \quad (**)$$

где  $j$  – целое неотрицательное число. Уравнение (\*\*) можно решать численно методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального значения любое число из интервала  $(k_s, k_f)$ . Если итерационный процесс сойдется при некотором  $j$ , то найден корень уравнения с номером  $j$ .

#### 8.4. Обратная задача

Предположим, что известны значения  $\alpha_j$ ,  $j = 0..N$ , а также  $k_a$ ,  $k_s$ . Нужно найти значения  $k_f$  и  $h$ .

Рассмотрим сначала *частный случай* этой задачи: предположим, что величина  $h$  также известна. Если известно только одно значение  $\alpha$ , то  $k_f$  определяется из характеристического уравнения (\*). Запишем это уравнение в виде  $F(k_f) = 0$ . Выберем начальное приближение  $k_f^0$  и используем метод Ньютона (проведем линеаризацию уравнения):

$$F(k_f) \approx F(k_f^0) + \frac{\partial F}{\partial k_f}(k_f^0) (k_f - k_f^0) = 0.$$

Отсюда определяется следующее приближение  $k_f^1 = k_f$  и так далее. В качестве начального приближения  $k_f^0$  можно взять число, немного большее чем известное значение  $\alpha$ .

Если дано несколько значений  $\alpha_j$ , то будем искать  $k_f$  как решение системы уравнений вида  $F_j(k_f) = 0$ ,  $j = 0 \dots N$ , то есть уравнений (\*) при различных  $\alpha = \alpha_j$ .

Обозначим

$$a_j = F_j(k_f^0), \quad b_j = \frac{\partial F_j}{\partial k_f}(k_f^0).$$

Тогда из условия минимума средней квадратической невязки

$$\sum_{j=0}^N [F_j(k_f)]^2 \approx \sum_{j=0}^N [a_j + b_j(k_f - k_f^0)]^2 \rightarrow \min$$

следует, что

$$k_f = k_f^0 - \frac{\sum_{j=0}^N a_j b_j}{\sum_{j=0}^N b_j^2}.$$

Если же значение  $h$  также является искомой величиной, то трудно выбрать для  $h$  начальное приближение. Поэтому следует поступить следующим образом.

Уравнение (\*\*\*) разрешим относительно  $h$  и запишем в виде  $h = G_j(k_f)$  при  $\alpha = \alpha_j$ . При условии, что  $N \geq 1$  имеем систему уравнений

$$G_0(k_f) - G_1(k_f) = 0, \quad \dots G_{N-1}(k_f) - G_N(k_f) = 0,$$



из которой определяется (если исходные данные непротиворечивы)  $k_f$ . Затем вычислим

$$h = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N G_j(k_f).$$

Для проверки правильности счета можно (при достаточном количестве значений  $\alpha_j$ ) попробовать определить также величины  $k_a$  и  $k_s$  и сравнить их с известными значениями. Но, как показывает опыт, в этом случае значения  $\alpha_j$  должны быть найдены с очень высокой точностью, что не всегда удается в лабораторных условиях.

## 9. ВОЗМУЩЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН

Если в волноводную структуру внести диэлектрические или проводящие тела, то характеристики ее собственных волн изменятся (или даже собственные волны вообще исчезнут). Исследуем, как меняются собственные волны волноводов и резонаторов при наличии неоднородностей в виде диэлектрических пластин, стержней или ограниченных тел.

### 9.1. Диэлектрическая пластина в плоском волноводе

Пусть плоский волновод ограничен тонкими проводящими пластинами  $x = 0$  и  $x = h$ . Предположим, как и раньше, что компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от координаты  $y$ . Рассмотрим случай ТЕ-поляризации электромагнитного поля. Как уже было установлено, если волновое число  $k$  – постоянная величина (среда однородная), то ненулевые компоненты собственных волн выражаются через потенциальные функции

$$u_n(x, z) = \sin \frac{\pi n}{h} x \cdot e^{\pm i \gamma_n z}, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

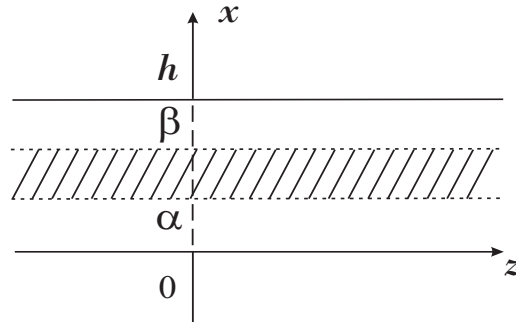


Рис. 9.1. Диэлектрическая пластина в плоском волноводе

Пусть внутри волновода вставлена диэлектрическая пластина  $\alpha < x < \beta$  (см. рис. 1), причем свойства диэлектрика таковы, что соответствующее ему волновое число  $k_1 > k$ . Следует ожидать, что постоянные распространения возмущенных собственных волн изменятся (вещественные постоянные увеличатся).

Будем искать значения параметра  $\gamma$ , при которых уравнение Гельмгольца с кусочно постоянным коэффициентом  $k(x)$  имеет ненулевые решения вида  $u(x, z) = f(x)e^{i\gamma z}$  (потенциальные функции собственных волн), удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения.

Функция  $f(x)$  должна удовлетворять уравнению

$$f''(x) + [k^2(x) - \gamma^2] f(x) = 0$$

в интервалах  $(0, \alpha)$ ,  $(\alpha, \beta)$  и  $(\beta, h)$ , здесь  $k(x)$  – кусочно постоянная функция. Общее решение этого уравнения (для каждого интервала отдельно) выразим через синус и косинус (а можно и через две экспоненты). Должны быть выполнены граничные условия

$f(0) = 0$ ,  $f(h) = 0$  и условия сопряжения  $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$ ,  $f'(\alpha - 0) = f'(\alpha + 0)$ ,  $f(\beta - 0) = f(\beta + 0)$ ,  $f'(\beta - 0) = f'(\beta + 0)$ .

Пусть  $f(x) = A \sin \delta x + B \cos \delta x$  при  $0 < x < \alpha$ , где  $\delta = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$  (вещественное положительное число или мнимое число с положительной мнимой частью). Если хотя бы первая мода невозмущенного волновода – волноводная, то  $\delta$  – вещественное число при малых возмущениях. Из первого граничного условия следует, что  $B = 0$ . Поэтому остается  $f(x) = A \sin \delta x$  при  $0 < x < \alpha$ .

При  $\alpha < x < \beta$  имеем  $f(x) = C \sin \delta_1 x + D \cos \delta_1 x$ , где  $\delta_1 = \sqrt{k_1^2 - \gamma^2}$ . Наконец, пусть  $f(x) = E \sin \delta(x - h) + F \cos \delta(x - h)$  при  $\beta < x < h$ . Смещение аргумента на  $h$  сделано для сокращения формул. Из второго граничного условия следует, что  $D = 0$ . Поэтому остается  $f(x) = E \sin \delta(x - h)$  при  $\beta < x < h$ .

Условия сопряжения при  $x = \alpha$  и  $x = \beta$  дают равенства

$$\begin{aligned} A \sin \delta \alpha &= C \sin \delta_1 \alpha + D \cos \delta_1 \alpha, \\ A \delta \cos \delta \alpha &= C \delta_1 \cos \delta_1 \alpha - D \delta_1 \sin \delta_1 \alpha, \\ C \sin \delta_1 \beta + D \cos \delta_1 \beta &= E \sin \delta(\beta - h), \\ C \delta_1 \cos \delta_1 \beta - D \delta_1 \sin \delta_1 \beta &= -E \delta \cos \delta(\beta - h). \end{aligned}$$

Эта СЛАУ относительно неизвестных  $A$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $D$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Поэтому для вычисления возмущенных постоянных распространения имеем *трансцендентное уравнение*

$$\begin{vmatrix} \sin \delta \alpha & 0 & -\sin \delta_1 \alpha & -\cos \delta_1 \alpha \\ \delta \cos \delta \alpha & 0 & -\delta_1 \cos \delta_1 \alpha & \delta_1 \sin \delta_1 \alpha \\ 0 & -\sin \delta(\beta - h) & \sin \delta_1 \beta & \cos \delta_1 \beta \\ 0 & \delta \cos \delta(\beta - h) & \delta_1 \cos \delta_1 \beta & -\delta_1 \sin \delta_1 \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Искать его решения – достаточно сложная задача (помним, что от  $\gamma$  зависят выражения  $\delta$  и  $\delta_1$ ). Рассмотрим другой способ определения продольных постоянных распространения собственных волн.

## 9.2. Пошаговый итерационный алгоритм

Используем идею *метода Галеркина*. Будем искать  $f(x)$  в виде

$$f(x) = \sum_{m=1}^M c_m \sin \frac{\pi m}{h} x.$$

Граничные условия и условия сопряжения выполнены по построению. Потребуем, чтобы функция  $f(x)$  удовлетворяла (приближенно) дифференциальному уравнению. Обозначим  $\Gamma = \gamma^2$ , так удобнее, и  $K = k_1^2 - k^2$ . Подставим выражение  $f(x)$  в уравнение, тогда

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^M c_m \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 \sin \frac{\pi m}{h} x + (k^2 - \Gamma) \sum_{m=1}^M c_m \sin \frac{\pi m}{h} x + \\ + \chi_{[\alpha, \beta]}(x) K \sum_{m=1}^M c_m \sin \frac{\pi m}{h} x = 0, \end{aligned}$$

здесь  $\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[\alpha, \beta]$ . Спроектируем это равенство на функции  $\sin \frac{\pi n}{h} x$ ,  $n = 1 \dots M$ . Получим

$$\frac{h}{2} [k^2 - \Gamma - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2] c_n + K \sum_{m=1}^M c_m I_{mn} = 0, \quad n = 1 \dots M,$$

где

$$I_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{\pi m}{h} x \cdot \sin \frac{\pi n}{h} x \cdot dx.$$

Эти интегралы легко вычислить явно:

$$I_{nn} = \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{h}{4\pi n} \sin \frac{2\pi n}{h} x \Big|_{\alpha}^{\beta},$$

$$I_{nm} = \frac{h}{2\pi(n-m)} \sin \frac{\pi(n-m)}{h} x - \frac{h}{2\pi(n+m)} \sin \frac{\pi(n+m)}{h} x \Big|_{\alpha}^{\beta},$$

$$m \neq n.$$

Теперь видно, что возможные значения  $\Gamma$  – это собственные значения некоторой матрицы, а числа  $c_m$  – компоненты соответствующих им собственных векторов. Ожидается, что таких собственных пар найдется ровно  $M$ . Но и этот способ достаточно сложен.

Чтобы в ходе дальнейших рассуждений коэффициенты  $c_m$  определялись однозначно, введем нормировку так, чтобы  $\max_{m=1..M} |c_m| = 1$ . Более того, пусть  $c_{m_0}$ , точно равно единице при некотором  $m_0$ .

Введем *параметр возмущения*  $\varepsilon \in [0, 1]$  и запишем уравнения спектральной задачи для моды с номером  $j$  так:

$$\frac{h}{2} [k^2 - \Gamma_j - (\frac{\pi n}{h})^2] c_n^j + \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} c_m^j = 0, \quad n = 1..M.$$

При  $\varepsilon = 0$  решение задачи на собственные значения известно – это моды невозмущенного плоского волновода, а именно,  $\Gamma_j = \gamma_j^2$ , и вектор  $c^j$  имеет компоненту  $c_j^j = 1$ , а остальные его компоненты – нули (то есть  $m_0 = j$ ).

Нужно перейти к решению этой задачи при  $\varepsilon = 1$ . Это можно сделать за один большой шаг, а можно за несколько мелких шагов, количество которых определяется во время счета.

Итак, предположим, что при некотором  $\varepsilon$  решение спектральной задачи известно. Что изменится, если  $\varepsilon$  заменить на  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ?

Обозначим через  $\Delta\Gamma_j$  и  $\Delta c^j$  соответствующие приращения собственного значения и собственного вектора с номером  $j$ . В уравнениях

$$\frac{h}{2} [k^2 - \Gamma_j - \Delta\Gamma_j - (\frac{\pi n}{h})^2] (c_n^j + \Delta c_n^j) + (\varepsilon + \Delta\varepsilon) K \sum_{m=1}^M (c_m^j + \Delta c_m^j) I_{mn} = 0,$$

$$n = 1..M,$$

раскроем скобки и используем равенства, которым удовлетворяют

$\Gamma_j$  и  $c^j$ . Получим

$$(*) \quad \frac{\hbar}{2} [k^2 - \Gamma_j - \Delta\Gamma_j - (\frac{\pi n}{\hbar})^2] \Delta c_n^j - \frac{\hbar}{2} \Delta\Gamma_j c_n^j + \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} \Delta c_m^j + \\ + \Delta\varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} (c_m^j + \Delta c_m^j) = 0, \quad n = 1 \dots M.$$

Эти уравнения можно упростить, если отбросить слагаемые второго порядка малости (произведения приращений). Иными словами, если использовать *метод возмущений первого порядка*. Тогда получим СЛАУ для  $\Delta c_m^j$

$$\frac{\hbar}{2} [k^2 - \Gamma_j - (\frac{\pi n}{\hbar})^2] \Delta c_n^j + \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} \Delta c_m^j = \\ = \frac{\hbar}{2} c_n^j \Delta\Gamma_j - \Delta\varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} c_m^j, \quad n = 1 \dots M. \quad (**)$$

Матрица коэффициентов этой неоднородной системы уравнений симметрична. Поэтому решение существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^M [\frac{\hbar}{2} c_n^j \Delta\Gamma_j - \Delta\varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} c_m^j] c_n^j = 0$$

(это условие ортогональности вектора правых частей ненулевому решению однородной СЛАУ). Отсюда определяется величина

$$\Delta\Gamma_j = \frac{2\Delta K \sum_{n=1}^M (\sum_{m=1}^M I_{mn} c_m^j) c_n^j}{\hbar \sum_{n=1}^M (c_n^j)^2} \Delta\varepsilon.$$

Затем находятся значения  $\Delta c_m^j$ , причем (поскольку значение СЛАУ заведомо не единственное) нужно принять  $\Delta c_{m_0}^j = 0$ , найти из СЛАУ остальные неизвестные (прямым или итерационным методом), а потом провести нормировку.

На первом шаге алгоритма, при  $\varepsilon = 0$  вычисления более простые. Уравнение (\*\*\*) при  $n = j$  имеет вид

$$0 = \frac{h}{2} \Delta \Gamma_j - \Delta \varepsilon K I_{j,j}.$$

Отсюда находится  $\Delta \Gamma_j$ . При  $n \neq j$  из уравнений (\*\*\*)

$$\frac{h}{2} \left[ \left( \frac{\pi j}{h} \right)^2 - \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] \Delta c_n^j = -\Delta \varepsilon K I_{j,n}$$

определяются  $\Delta c_n^j$ , а  $\Delta c_{m_0}^j$  полагаем равным нулю. Затем вычисляется вектор  $c := c + \Delta c$  и проводится его нормировка.

Если не пренебрегать величинами второго порядка малости, то можно построить *итерационный процесс* для вычисления значений  $\Delta \Gamma_j$  и  $\Delta c^j$ .

Чтобы приращения  $\Delta \Gamma_j$  и  $\Delta c^j$  определились однозначно, зададим  $\Delta c_{m_0}^j = 0$ . Уравнение с номером  $m_0$  из СЛАУ перепишем так:

$$-\frac{h}{2} \Delta \Gamma_j = \varepsilon \Delta K \sum_{m=1}^M I_{mm_0} \Delta c_m^j + \Delta \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mm_0} (c_m^j + \Delta c_m^j).$$

Остальные уравнения этой системы уравнений преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \left[ k^2 - \Gamma_j - \Delta \Gamma_j - \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] \Delta c_n^j &= \frac{h}{2} \Delta \Gamma_j c_n^j - \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} \Delta c_m^j - \\ &- \Delta \varepsilon K \sum_{m=1}^M I_{mn} (c_m^j + \Delta c_m^j), \quad n = 1..M, \quad n \neq m_0. \end{aligned}$$

Зададим начальное приближение  $\Delta c_n^j = 0$  и будем в цикле вычислять  $\Delta \Gamma_j$  и  $\Delta c_n^j$  (при  $n \neq m_0$ ) – заданное число раз или пока не будет достигнута заданная погрешность.

При  $\varepsilon = 0$  вычислительная схема немного проще.

После того, как цикл завершится, проведем нормировку уточненного вектора  $c^j + \Delta c^j$ . При этом может измениться номер  $m_0$ .

Как выбирать значение  $\Delta\varepsilon$ ? Во-первых, должен сходиться итерационный процесс. Если сходимости нет, имеет смысл уменьшить значение  $\Delta\varepsilon$ . Во-вторых, вероятно, соответствующие  $\Delta\varepsilon$  приращения  $\Delta\Gamma_j$  должны быть относительно небольшими – такими, чтобы собственные значения  $\delta_j$  не перемешивались. Иными словами, чтобы *сохранилась упорядоченность* этих значений после пересчета. Это будет, если выполнено условие  $\Delta\Gamma_j < \frac{1}{2} \min_{k=1..M-1} |\Gamma_{k+1} - \Gamma_k|$ .

Точно такие же рассуждения можно использовать, если нужно найти *собственные волны прямоугольного волновода с диэлектрическим стержнем* или *собственные частоты прямоугольного резонатора с диэлектрической вставкой*.

## 10. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Простые частные решения уравнений Максвелла (элементарные волны) можно построить не только в декартовой системе координат. Наиболее часто используются цилиндрические и сферические координаты.

### 10.1. Цилиндрические волны

Запишем систему уравнений Максвелла в *цилиндрической системе координат*  $(r, \alpha, z)$ . В этом случае

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r} & \alpha_0 & \frac{z_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\alpha & A_z \end{vmatrix}$$



или

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= i\omega\mu_0\mu H_\alpha, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} &= i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

Все искомые величины являются  $2\pi$ -периодическими функциями переменной  $\alpha$ , поэтому будем искать их в виде разложений в ряды Фурье вида

$$A(r, \alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(r, z) e^{in\alpha}$$

(предполагая, что все ряды сходятся и их суммы можно дифференцировать). Коэффициенты Фурье искомых функций с номером  $n$  (этот номер мы в дальнейшем не указываем) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{in}{r} H_z - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, & \frac{in}{r} E_z - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= i\omega\mu_0\mu H_\alpha, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) - \frac{in}{r} H_r &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_\alpha) - \frac{in}{r} E_r &= i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

В частном случае, когда решения этой системы уравнений не зависят от координаты  $z$ , она распадается на две независимые подсистемы:

$$\frac{in}{r} E_z = i\omega\mu_0\mu H_r, \quad E'_z = -i\omega\mu_0\mu H_\alpha, \quad \frac{1}{r} (r H_\alpha)' - \frac{in}{r} H_r = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z$$

и

$$\frac{in}{r} H_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, \quad -H'_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, \quad \frac{1}{r} (rE_\alpha)' - \frac{in}{r} E_r = i\omega\mu_0\mu H_z,$$

здесь производные по  $r$  обозначены штрихом. Тогда любое решение системы Максвелла можно представить как сумму частных решений двух типов:  $E = (0, 0, E_z)$ ,  $H = (H_r, H_\alpha, 0)$  (параллельная поляризация относительно оси  $z$ ) и  $E = (E_r, E_\alpha, 0)$ ,  $H = (0, 0, H_z)$  (перпендикулярная поляризация).

Например, для решений первого типа

$$H_r = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{in}{r} E_z, \quad H_\alpha = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} E'_z,$$

а компонента  $E_z$  (потенциальная функция) – решение *уравнения Бесселя*

$$E''_z + \frac{1}{r} E'_z + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) E_z = 0.$$

В более простом частном случае, когда поле не зависит от координаты  $\alpha$  (*осесимметричное поле*), частные решения системы уравнений Максвелла (при  $n = 0$ ) имеют вид  $E = (0, 0, E_z)$ ,  $H = (0, H_\alpha, 0)$  и  $E = (0, E_\alpha, 0)$ ,  $H = (0, 0, H_z)$ .

Фундаментальную систему решений уравнения Бесселя образуют любые две функции из четырех:  $J_n(kr)$ ,  $N_n(kr)$ ,  $H_n^{(1)}(kr)$  и  $H_n^{(2)}(kr)$ . Если хотя бы в одной точке области, где рассматриваются цилиндрические волны, значение координаты  $r$  обращается в нуль, то только функция Бесселя  $J_n(kr)$  имеет физический смысл. В ограниченной области, не имеющей таких точек, можно брать любую пару цилиндрических функций. В неограниченной области, не содержащей начала координат, нужно оставить одну из функций Ханкеля  $H_n^{(1)}(kr)$  или  $H_n^{(2)}(kr)$ , а какую именно — определяется по выбранной форме зависимости поля от времени и по дополнительному условию на бесконечности (т. е. от того, какие волны нужно оставить: уходящие на

бесконечность или приходящие с бесконечности). Чтобы узнать, какая волна переносит энергию в нужном направлении, нужно опять-таки вычислить вектор Пойнтинга.

## 10.2. Сферические волны

Чтобы получить элементарные сферические волны, запишем систему уравнений Максвелла в сферической системе координат  $(r, \alpha, \theta)$ . При этом

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r^2 \sin \theta} & \frac{\theta_0}{r \sin \theta} & \frac{\alpha_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\alpha \end{vmatrix}$$

или

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\alpha)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r}.$$

Удобно искать независимо друг от друга решения системы уравнений Максвелла в предположении, что  $E_r = 0$  или  $H_r = 0$ . Кроме того, все искомые функции можно разложить в ряды Фурье по координате  $\alpha$  вида

$$A(r, \theta, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(r, \theta) e^{im\alpha}.$$

Тогда для системы уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты Фурье искоемых функций (в каждом из двух частных

случаев), будет потенциальным уравнение 2-го порядка с частными производными

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u(r, \theta) = 0.$$

После некоторых элементарных преобразований его частные решения можно найти методом разделения переменных, они имеют вид

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+1/2}(kr) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m \leq n,$$

где  $Z_{n+1/2}(r)$  – цилиндрические функции полуцелого порядка, а  $P_n^{(m)}(t)$  – присоединенные функции Лежандра.

Список сокращений:

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений,

БСЛАУ – бесконечная СЛАУ,

ПСФУ – парное сумматорное функциональное уравнение,

ИСТ – интегрально-сумматорное тождество,

ИУ – интегральное уравнение.

## Литература

- [1] Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: учебное пособие. – Казанский государственный университет, 2008. – 104 с.
- [2] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
- [3] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М.: Высшая школа, 1991.
- [4] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 768 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. – 560 с.
- [6] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.
- [7] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн. – Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 4–32.

- [8] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
- [9] Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах. – Препринт ПМФ–03–02. Казань: Казан. матем. об-во, 2003. – 30 с.
- [10] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
- [11] Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 296 с.
- [12] Маркузе Д. Оптические волноводы. – М.: Мир, 1974. – 574 с.
- [13] Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977. – 368 с.

## Содержание

Предисловие .....	3
1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны .....	4
1.1. Уравнения Максвелла .....	4
1.2. Метод комплексных амплитуд .....	5
1.3. Условия сопряжения и граничные условия .....	7
1.4. Энергия электромагнитного поля .....	7
2. Плоские волны. Отражение и преломление .....	9
2.1. Двумерное электромагнитное поле .....	9
2.2. Отражение и преломление плоской волны на плоской границе раздела сред .....	11
3. Дифракция электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте .....	14
3.1. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости .....	15
3.2. Интегральное уравнение задачи дифракции .....	17
3.3. Перпендикулярная поляризация поля .....	18
3.4. Задача о скачке .....	19
4. Интегральное уравнение с логарифмическим ядром. Метод Галеркина .....	23
4.1. Общая схема метода Галеркина .....	23
4.2. Интегральное уравнение с логарифмическим ядром .....	25
4.3. Выделение логарифмической особенности в ядре интегрального уравнения .....	26
5. Дифракция электромагнитной волны на периодической решетке .....	28
5.1. Парное сумматорное функциональное уравнение .....	29
5.2. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений ..	30
5.3. Закон сохранения энергии .....	32
5.4. Перпендикулярная поляризация поля .....	34

6. Волноводы и резонаторы с металлическими стенками .....	35
6.1. Плоский волновод .....	35
6.2. Прямоугольный волновод .....	40
6.3. Прямоугольный резонатор .....	43
7. Перегородки в плоском волноводе .....	44
7.1. Поперечная перегородка .....	44
7.2. Разветвление плоского волновода .....	48
7.3. Переопределенные граничные задачи для уравнения Гельмгольца .....	52
7.4. Задача о скачке и интегральные уравнения задачи дифракции .....	55
8. Планарный диэлектрический волновод .....	57
8.1. Постановка задачи о собственных волнах .....	58
8.2. Моды непрерывного спектра .....	60
8.3. Моды дискретного спектра .....	62
8.4. Обратная задача .....	63
9. Возмущение собственных волн .....	65
9.1. Диэлектрическая пластина в плоском волноводе .....	65
9.2. Пошаговый итерационный алгоритм .....	68
10. Цилиндрические и сферические волны .....	72
10.1. Цилиндрические волны .....	72
10.2. Сферические волны .....	75
Литература .....	77